9. Zadania z analizy funkcjonalnej

1. T_n jest ciągiem ograniczonych operatorów liniowych z przestrzeni unormowanej X w przestrzeń Banacha Y. Pokazać, że zbiór $\{x \in X : \lim_{n\to\infty} T_n x \text{ istnieje}\}$ jest równy X lub jest zbiorem I-ej kategorii. `Wskazówka.` Niech

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : \lim_{n\to\infty} T_n x \text{ istnieje}\}, \\ B &= \{x \in X : \sup_n \|T_n x\| < +\infty\}. \end{aligned}$$

Mamy $A \subset B$. Jeśli A nie jest pierwszej kategorii to również B nie jest I-ej kategorii. Zatem normy $\|T_n\|$ są wspólnie ograniczone. Pokazać, że wtedy A jest domknięty. Ponieważ nie jest I-ej kategorii, to zawiera kulę otwartą. Ale A jest podprzestrzenią liniową. Zatem $A = X$.

$(**)$ Pokazać, że teza nie musi być spełniona jeśli Y nie jest przestrzenią Banacha.

2. Niech T_n będą ograniczonymi operatorami liniowymi z przestrzeni Banacha X w przestrzeń unormowaną Y. Pokazać, że jeśli $T_n x$ jest zbieżny dla każdego x z przestrzeni Banacha X, to normy $\|T_n\|$ są wspólnie ograniczone. Pokazać, że operator określony wzorem

$$Tx = \lim_n T_n x$$

jest ograniczony oraz $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$.

3. Niech a_n będzie ciągiem o wyrazach zespolonych o własności, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu $\{x_n\} \in c_0$. Pokazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. `Wskazówka:` Rozważyć funkcjonały $\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$ dla $x \in c_0$.

4. Ciąg x_n wektorów w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ ma własność $\sup_n |(y, x_n)| < +\infty$ dla dowolnego $y \in \mathcal{H}$. Pokazać, że $\sup_n \|x_n\| < +\infty$. `Wskazówka.` Rozważyć funkcjonały liniowe $y \mapsto (y, x_n)$.

5. $(*)$ $\{a_{mn}\}_{n,m=0}^{\infty}$ jest macierzą zespoloną o własności : dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg $\{x_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$, dla którego szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_n^{(m)}$ jest rozbieżny. Pokazać, że istnieje taki ciąg $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2$, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x_n$ jest rozbieżny dla wszystkich $m \in \mathbb{N}$.

6. Ciąg elementów x_n w przestrzeni unormowanej X ma własność, że ciąg liczbowy $\varphi(x_n)$ jest ograniczony dla dowolnego ciągłego funkcjonału φ określonego na X. Pokazać, że ciąg $\|x_n\|$ jest ograniczony.

7. Niech X oznacza przestrzeń unormowaną złożoną z ciągów zespolonych $x = \{x_n\}$ dla których tylko skończenie wiele wyrazów jest różnych od zera, z normą $\|x\| = \max_n \|x_n|$. Określmy operator liniowy $T : X \to X$ wzorem

$$Tx = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots).$$

Pokazać, że T jest ograniczony, ale T^{-1} nie jest ograniczony. Czy to przeczy twierdzeniu o odwzorowaniu otwartym ?

8. X jest przestrzenią Banacha względem dwu norm $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, przy czym $\|\cdot\|_1 \leqslant c\|\cdot\|_2$, dla pewnej stałej c. Pokazać, że $\|\cdot\|_2 \leqslant d\|\cdot\|_1$, dla pewnej stałej d.

9. M, N są domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X takimi, że każdy element $x \in X$ ma jednoznaczne przedstawienie $x = m + n$, $m \in M$, $n \in N$. Pokazać, że istnieje stała c taka, że $\|m\| + \|n\| \leqslant c\|x\|$, dla każdego $x \in X$.

10. Niech $C_{per}(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych o okresie 2π. Pokazać, że każdy ograniczony funkcjonał liniowy na tej przestrzeni ma postać $\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dg(x)$ dla pewnej funkcji lewostronnie ciągłej funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziale $[0, 2\pi]$ oraz $\|\varphi\| = Var(g)$.

11. Operator T jest określony na $C(\mathbb{T})$ następująco:

$$Tf = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \widehat{f}(n) e^{inx},$$

dla pewnego ustalonego ciągu a_n, gdzie $\widehat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$. Załóżmy, że $Tf \in C(\mathbb{T})$ dla dowolnej $f \in C(\mathbb{T})$. Pokazać, że T jest ograniczonym operatorem liniowym na $C(\mathbb{T})$. `Wskazówka:` Sprawdzić, że T ma domknięty wykres.

12. Pokazać, jeśli operator T z przestrzeni unormowanej X w przestrzeń unormowaną Y ma domknięty wykres oraz T^{-1} istnieje, to również T^{-1} ma domknięty wykres. `Wskazówka:` Znaleźć związek pomiędzy wykresami operatorów T i T^{-1}.

13. Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi oraz $T_1 : X \to Y$ ma domknięty wykres natomiast $T_2 : X \to Y$ jest ograniczony. Pokazać, że $T_1 + T_2$ ma domknięty wykres.

14. Pokazać, że jądro operatora liniowego $T : X \to Y$ o wykresie domkniętym jest domkniętą podprzestrzenią w X.