Rozwiązanie zadania 5 z listy 4.

Krzywa C otacza fragment spektrum $\sigma(a)$. Oznaczmy ten fragment symbolem $\sigma_C(a)$ i załóżmy, że $\sigma_C(a) \subsetneq \sigma(a)$ oraz, że zbiór $\sigma_C(a)$ można połączyć z ∞ krzywą rozłączną z $\sigma(a)$.

Niech U_C będzie obszarem zawierającym C wraz z obszarem ograniczonym przez C, oraz rozłącznym z pozostałą częścią spektrum $\sigma(a)$. Dla funkcji f holomorficznej w otoczeniu spektrum $\sigma(a)$ określamy funkcję $\widetilde{f}$ poprzez $\widetilde{f}(z) = f(z)$ dla $z \in U_C$ oraz $\widetilde{f}(z) = 0$ dla $z \notin U_C$. Ta funkcja jest holomorficzna w otoczeniu $\sigma(a)$. Zauważmy, że $\widetilde{f}(a) = f_C(a)$. Ponadto

$$\widetilde{fg} = \widetilde{f}\widetilde{g}.$$

Stąd otrzymujemy (b). Podstawiając $f \equiv 1$ otrzymujemy (d). Dalej

$$\sigma(f_C(a)) = \sigma(\widetilde{f}(a)) = \widetilde{f}(\sigma(a)) = f(\sigma_C(a)) \cup \{0\}.$$

Stąd otrzymujemy (c).

Załóżmy, że dla $f \equiv 1$ mamy $f_C(a) = 0$. Na podstawie (c) otrzymujemy, że $f(\sigma_C(a)) \subset \{0\}$. Zatem $\sigma_C(a) = \emptyset$. Stąd wynika (a).

Rozważmy przypadek, gdy $\sigma_C(a)$ nie ma połączenia z ∞. Np. $\sigma_C(a)$ jest podzbiorem koła o środku w z_0 i promieniu 1, a zbiór $\sigma(a) \setminus \sigma_C(a)$ zawiera pierścień o środku w z_0 i promieniach 2 i 3. Przyjmijmy dla uproszczenia, że element a jest odwracalny oraz 0 ma połączenie z $\sigma_C(a)$ rozłączne z $\sigma(a)$.[1] Mamy $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$ oraz krzywa $C^{-1} = \{z^{-1} : z \in C\}$ otacza zbiór $\sigma_C(a)^{-1}$. Zauważmy, że $\sigma_C(a)^{-1} = \sigma_{C^{-1}}(a^{-1})$. Ponadto zbiór $\sigma_{C^{-1}}(a^{-1})$ ma połączenie z ∞ rozłączne z $\sigma(a^{-1})$. Na podstawie pierwszej części otrzymujemy

$$G_{C^{-1}}(a^{-1}) = \tilde{G}(a^{-1})$$

Dalej stosujemy podstawienie $z = u^{-1}$.

$$\begin{aligned} f_C(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(ze-a)^{-1}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C^{-1}} f(u^{-1})(u^{-1}e-a)^{-1}\,\frac{du}{u^2} \\ &= -a^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C^{-1}} u^{-1}f(u^{-1})\,(ue-a^{-1})^{-1}\,du \end{aligned}$$

[1] Można to osiągnąć poprzez zastąpienie elementu a przez $z_1(a - z_0e)$.

Na podstawie pierwszej części dowodu otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
f_C(a)g_C(a) &= a^{-2}\,[u^{-1}f(u^{-1})](a^{-1})(u^{-1}g(u^{-1})](a^{-1}) \\
&= a^{-2}\,[u^{-2}f(u^{-1})g(u^{-1})](a^{-1}) = [f(u^{-1})g(u^{-1})](a^{-1}) = (fg)(a)
\end{aligned}
$$