Pan Dołęga miał rację. Można pokazać, że zbiór

$$U = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z \notin \sigma(a),\ (ze - a)^{-1} \in \overline{\mathrm{alg}(a)}\}$$

jest otwarty. Niech $z_0 \in U$ Wtedy

$$(ze-a)^{-1} = (z_0e-a)^{-1}\left(e + (z - z_0)(z_0e - a)^{-1}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-z_0)^n(z_0e-a)^{-n-1}$$

Szereg jest zbieżny jeśli

$$|z - z_0| < \frac{1}{\|(z_0e - a)^{-1}\|}.$$

Każdy składnik leży w $\overline{\mathrm{alg}(a)}$ zatem suma też. Stąd U jest otwarty w $\mathbb{C}$ oraz domknięty w $\mathbb{C}\setminus\sigma(a)$. Zatem $U = \mathbb{C}\setminus\sigma(a)$ przy założeniu, że $\sigma(a)$ nie rozcina płaszczyzny.