

Założmy, że A, B są operatorami Hilberta-Schmidta. Wtedy $|AB| = U^*AB$ dla pewnej częściowej izometrii U . Zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} |AB| &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle U^*ABe_n, e_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Be_n, A^*Ue_n \rangle \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Be_n\| \|A^*Ue_n\| \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Be_n\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|A^*Ue_n\|^2 \right)^{1/2} = \|B\|_{HS}^{1/2} \|A^*U\|_{HS}^{1/2} \leq \|A\|_{HS}^{1/2} \|B\|_{HS}^{1/2} \end{aligned}$$