1. Zadania do wykładu
Szeregi i całki Fouriera

1. Pokazać, że

$$\int_0^{2\pi} \sin^m x \cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^m x \sin nx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^m x \cos nx\,dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^m x \sin nx\,dx = 0, \quad \text{dla } n > m.$$

2. Wielomianem trygonometrycznym stopnia n nazywamy skończoną sumę postaci

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Pokazać, że wielomian trygonometryczny stopnia n złożony tylko z cosinusów można zapisać jako $P(\cos x)$, gdzie $P(z)$ jest wielomianem stopnia n zmiennej z.

3. Udowodnić tożsamości

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx &= \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{1}{2}x},\\
\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x &= \frac{\sin 2nx}{2\sin x},\\
\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx &= \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{1}{2}x}.
\end{aligned}$$

4. Znaleźć zera wielomianów trygonometrycznych

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx,$$

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

w przedziale $[0, 2\pi]$.

5. Pokazać, że wielomian trygonometryczny

$$\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{n}\sin nx$$

w przedziale $[0, \pi]$ posiada maksima w punktach $\frac{\pi}{n+1}$, $\frac{3\pi}{n+1}, \ldots, \frac{(2q-1)\pi}{n+1}$ a minima w punktach $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\ldots$, $\frac{2(q-1)\pi}{n}$, gdzie $q = [(n+1)/2]$.

6. Pokazać, że wielomian trygonometryczny bez wyrazu wolnego $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ nie może mieć stałego znaku dla wszystkich wartości x chyba, że $a_k = b_k = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

7. Pokazać, że jeśli funkcja o okresie 2π jest parzysta, to szereg Fouriera zawiera tylko cosinusy, natomiast jeśli jest nieparzysta, to tylko sinusy.

8. Funkcja $f(x)$ o okresie 2π spełnia warunek $f(x+\pi) = -f(x)$. Pokazać, że parzyste współczynniki Fouriera są równe 0, tzn. $a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \ldots = 0$.

9. Funkcja $f(x)$ o okresie 2π spełnia warunki

(a) $f(-x) = f(x)$ i $f(x+\pi) = f(x)$;

(b) $f(-x) = -f(x)$ i $f(x+\pi) = f(x)$.

Które współczynniki Fouriera znikają ?

10. Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość 1 na przedziale $(0,\pi)$ i -1 na $(\pi,2\pi)$. Znaleźć współczynniki Fouriera tej funkcji i zbadać zbieżność szeregu Fouriera.

11. Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną na przedziale $(0,\pi)$. Rozszerzamy tę funkcję do nieparzystej funkcji $F(x)$ o okresie 2π. Sinusowym szeregiem Fouriera funkcji f nazywamy szereg Fouriera funkcji F. Pokazać, że sinusowy szereg Fouriera funkcji f ma postać $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,dx$, gdzie $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx$. Zdefiniować analogicznie cosinusowy szereg Fouriera funkcji $f(x)$ rozszerzając ją do funkcji parzystej o okresie 2π.

12. Znaleźć szereg Fouriera w przedziale $(0,2\pi)$, a także w szereg sinusowy i cosinusowy w przedziale $(0,\pi)$ następujących funkcji: $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \cos ax,\ \sin ax,\ [x/\pi],\ [2x/\pi]$. Zbadać zbieżność szeregów i wskazać punkty w których szereg jest zbieżny do wartości innej niż wartość funkcji.

13. Korzystając z rozwinięcia funkcji x^2 obliczyć sumy szeregów

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots,$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots.$$

14. Pokazać, że

$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a}-1}{\pi}\left\{\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx - n\sin nx}{a^2+n^2}\right\}, \qquad (0<x<2\pi);$$

$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a}-1}{a\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{(-1)^n e^{a\pi}-1\}\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}, \qquad (0<x<\pi);$$

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{1-(-1)^n e^{a\pi}\}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}, \qquad (0<x<\pi).$$

Obliczyć sumy szeregów dla $x=0$. `Wskazówka:` Obliczyć odpowiedni szereg Fouriera i skorzystać np. z kryterium Jordana.

15. Znaleźć sumy szeregów $\sum \frac{a\cos nx}{n^2+a^2}$ i $\sum \frac{n\sin nx}{n^2+a^2}$.

16. Wykazać, że dla $-1<r<1$ i dla wszystkich wartości x zachodzi

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx.$$

$*$**17.** Pokazać, że jeśli a_n i b_n są współczynnikami Fouriera funkcji $f(x)$, to dla $-1<r<1$ zachodzi

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-u)+r^2}f(u)\,du.$$

$*$**18.** Udowodnić, że

$$\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-u)+r^2}f(u)\,du = \tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

dla wszystkich x, dla których istnieje prawa strona.

$*$**19.** Pokazać, że

$$\left|\int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

$*$**20.** Pokazać, że

$$\int_0^{2\pi}|D_n(x)|\,dx = 4\log n + \varepsilon_n,$$

gdzie ε_n jest ciągiem ograniczonym.