2. Zadania do wykładu
Szeregi i całki Fouriera

1. Pokazać, że jeśli funkcja $f(x)$ ma okres 2π i jest bezwzględnie całkowalna, to

$$\int_a^{2\pi+a} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

2. Pewien prostokąt R o bokach równoległych do osi współrzędnych x i y został podzielony na prostokąty R_i, również o bokach równoległych do osi współrzędnych, w ten sposób, że w każdym prostokącie podziału długość jednego z boków jest liczbą całkowitą. Pokazać, że również w wyjściowym prostokącie długość jednego z boków musi być liczbą całkowitą. `Wskazówka:` Pokazać, że

$$\int_R e^{2\pi ix}e^{2\pi iy}\,dx\,dy = 0.$$

3. Funkcja $f(x)$ o okresie 2π jest klasy C^1 na przedziale $[0,2\pi]$, tzn. $f'(x)$ jest ciągła na $(0,2\pi)$ oraz istnieją granice jednostronne dla $f'(x)$ w końcach przedziału. Sprawdzić, że z dowodu podanego na wykładzie wynika, że $n(|a_n|+|b_n|) \leqslant C$, dla pewnej stałej C.

4. Pokazać, że jeśli funkcja $f(x)$ o okresie 2π jest ciągła, to istnieje wielomian $P(x)$ taki, że $|f(x)-P(x)| < \varepsilon$ dla $x \in [0,2\pi]$ oraz $P(0) = P(2\pi)$. `Wskazówka:` Skorzystać z twierdzenia Weierstrassa.

5. Funkcja $f(x)$ spełnia warunek

$$|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha,$$

dla $x, y \in [a,b]$ dla pewnych stałych $L > 0$ i $\alpha > 0$. Pokazać, że jeśli $\alpha > 1$, to $f(x)$ jest funkcją stałą. Pokazać na przykładzie, że $\alpha > 1$ jest możliwe, gdy punkt $y = y_0$ jest ustalony.

6. Niech $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Pokazać, że istnieją liczby A_n i α_n takie, że $f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum A_n \cos(nx-\alpha_n)$.

7. Niech $h(x) = f(x)\cos x$. Wyrazić współczynniki Fouriera funkcji h za pomocą współczynników Fouriera funkcji f.

8. Niech $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Wyrazić współczynniki Fouriera funkcji $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ za pomocą współczynników Fouriera funkcji $f(x)$. Pokazać, że $F(x)$ jest różnicą dwu funkcji rosnących na przedziale $[0,2\pi]$. Zbadać zbieżność szeregu Fouriera funkcji $F(x)$. Pokazać, że jeśli a_n i b_n są współczynnikami Fouriera funkcji $f(x)$, to szereg $\sum b_n/n$ jest zbieżny.

9. Pokazać, że

$$\lim_n \int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

10. Pokazać, że szereg trygonometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log(n+2)}.$$

jest zbieżny w każdym punkcie. Niech $f(x)$ oznacza sumę tego szeregu. Pokazać, że funkcja $f(x)$ nie jest bezwzględnie całkowalna na przedziale $[0,2\pi]$. `Wskazówka:` Skorzystać z zadania 8. Za jakiś czas pokażemy, że zbieżny szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log(n+2)}$$

reprezentuje nieujemną funkcję całkowalną na przedziale $[0,2\pi]$.

11. Obliczyć granicę

$$\lim_n \int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{x}\sin(n+\tfrac{1}{2})x\,dx,$$

przy założeniu, że $f(x)$ jest klasy C^1 i o okresie 2π.

12. Do jakiej liczby zbieżny jest szereg Fouriera funkcji $f(x) = x - [x]$ w punkcie (a) e^2 , (b) 8, (c) $9e + \pi$?

13. Obliczyć

$$\int_0^{2\pi} D_n^2(x)\, dx.$$

14. Niech $f(\theta)$ będzie funkcją ciągła o okresie 2π. Wyrazić pole obszaru ograniczonego przez krzywą o równaniu $r = f(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, we współrzędnych biegunowych, za pomocą współczynników Fouriera funkcji $f(\theta)$.

15. Pokazać, że jeśli f jest funkcją o okresie 2π klasy C^∞, to dla dla dowolnej liczby naturalnej k mamy

$$|a_n| \leqslant M_k n^{-k} \quad \text{oraz} \quad |b_n| \leqslant M_k n^{-k},$$

gdzie $M_k = \max |f^{(k)}(x)|$.

16. Udowodnić, że jeśli

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha (|a_n| + |b_n|) < +\infty,$$

dla liczby dodatniej α, to f jest funkcją różniczkowalną $[\alpha]$ razy oraz pochodna rzędu $[\alpha]$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha - [\alpha]$.

17. W zadaniach 10, 12 i 14 z listy nr 1 zbadać jednostajną zbieżność szeregu Fouriera.

Wykład będzie się odbywał w sali WŚ, a ćwiczenia w sali A.