3. Zadania do wykładu
Szeregi i całki Fouriera

1. Funkcja $f(x)$ jest sumą dwu funkcji monotonicznych na przedziale $[a,b]$. Pokazać, że $f(x)$ można przedstawić jako różnicę dwu funkcji rosnących nieujemnych. Pokazać, że iloczyn dwu funkcji takich jak $f(x)$ można również przedstawić w postaci takiej różnicy.

2. Pokazać, że funkcja przedziałami monotoniczna (skończenie wiele przedziałów) na odcinku $[a,b]$ jest również różnicą dwu nieujemnych funkcji rosnących.

3. Uzasadnić, że funkcja $u \operatorname{ctg}(u/2)$ jest malejąca na przedziale $[0,\pi]$.

4. Dla iloczynu skalarnego $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx$ sprawdzić ortogonalność układów funkcji

$$\{\cos nx\}_{n=0}^\infty, \qquad \{\sin nx\}_{n=1}^\infty.$$

Dla każdego przypadku sprawdzić, czy istnieje niezerowa funkcja $f(x)$ ciągła (całkowalna z kwadratem) na przedziale $[0,\pi]$, ortogonalna do wszystkich funkcji układu.

5. Sprawdzić ortogonalność podanych układów wielomianów względem iloczynu skalarnego $\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)w(x)\,dx$.

(a) $P_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right]$, $w(x)=1$ dla $x\in[-1,1]$ oraz $w(x)=0$ dla $x\notin[-1,1]$ (wielomiany Legendre'a).

(b) $T_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!!}(1-x^2)^{1/2}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n-1/2}\right]$, $w(x)=(1-x^2)_+^{-1/2}$ (wielomiany Czebyszewa).

(c) $L_n^{(a)}(x) = \dfrac{1}{n!}e^x x^{-a}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+a}\right)$, $w(x)=e^{-x}x_+^a$, $a>-1$ (wielomiany Laguerre'a).

(d) $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)$, $w(x)=e^{-x^2}$ (wielomiany Hermite'a).

6. Sprawdzić, że układ funkcji Haara $h_{m,n}(x)$, $m\geqslant 0$, $1\leqslant n\leqslant 2^m$, gdzie $h_{0,1}=1$ oraz

$$h_{m,n}(x) = \begin{cases} 2^{m/2} & \dfrac{n-1}{2^m}\leqslant x < \dfrac{2n-1}{2^{m+1}}, \\ -2^{m/2} & \dfrac{2n-1}{2^m}\leqslant x<\dfrac{n}{2^m}, \\ 0 & x<\dfrac{n-1}{2^m} \text{ lub } x\geqslant \dfrac{n}{2^m}, \end{cases}$$

jest ortonormalny względem iloczynu skalarnego $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Czy istnieje niezerowa funkcja ciągła (całkowalna z kwadratem) na przedziale $[0,1]$ ortogonalna do wszystkich funkcji tego układu ?

7. Wyrazić całkę $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+\pi)-f(x)|^2\,dx$ za pomocą współczynników Fouriera funkcji f.

8. Niech $f(x)=e^{-x}$ dla $0<x<2\pi$. Obliczyć $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$, gdzie a_n i b_n są współczynnikami Fouriera funkcji $f(x)$.

9. Dla $0<\delta<\pi$ określmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x|\leqslant\delta, \\ 0 & \text{dla } \delta<|x|<\pi, \end{cases}$$

i rozszerzmy ją do funkcji o okresie 2π. Znaleźć współczynniki Fouriera tej funkcji. Wywnioskować, że $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n\delta}{n} = \frac{\pi-\delta}{2}$. Ze wzoru Parsevala wyprowadzić równość $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin^2 n\delta}{n^2} = \frac{\delta(\pi-\delta)}{2}$. Przechodząc do granicy obliczyć całkę $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

10. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = (\pi - x)^2$, $0 < x < 2\pi$. Zbadać jednostajną zbieżność szeregu Fouriera. Podstawiając odpowiednią wartość x obliczyć sumę szeregu $\sum \frac{1}{n^2}$. Stosując wzór Parsevala obliczyć sumę $\sum \frac{1}{n^4}$.

11. Funkcja $f(x)$ o okresie 2π jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{dla } |x| \leqslant \pi/2, \\ 0 & \text{dla } \pi/2 < |x| < \pi. \end{cases}$$

Wyznaczyć szereg Fouriera funkcji $f(x)$ i funkcji $f'(x)$. Do jakiej wartości jest zbieżny szereg Fouriera funkcji $f'(x)$ w punktach $x = \pm\pi/2$? Obliczyć sumy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)^2(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{(2n-3)(2n+1)}.$$

12. Pokazać, że różnica całek

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx - \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 dx$$

jest ograniczona jednostajnie względem n. Zastosować tę własność do obliczenia całki $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$.

13. Pokazać, że $\|f - s_n(f,x)\| < \|f - t_n\|$ dla dowolnego wielomianu trygonometrycznego t_n stopnia n, różnego od sumy częściowej $s_n(f,x)$ szeregu Fouriera funkcji f.

14. Pokazać, że jeśli dla funkcji bezwzględnie całkowalnej f o okresie 2π mamy

$$\sigma_n(f)(x) \to \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)), \quad n \to \infty,$$

przy założeniu, że funkcja f ma granice jednostronne w punkcie x.