4. Zadania do wykładu
Szeregi i całki Fouriera

1. Funkcja $f(x)$ jest określona na przedziale $[0,\pi]$ i całkowalna w sensie Riemanna, lub całkowolna z kwadratem w sensie Lebesgue'a. Niech a_n oznaczają współczynniki cosinusowego szeregu Fouriera funkcji $f(x)$. Pokazać, że

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2.$$

Pokazać, że jeśli b_n oznaczają współczynniki sinusowego szeregu Fouriera funkcji $f(x)$, to

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty |b_n|^2.$$

2. Znaleźć sinusowy szereg Fouriera funkcji $f(x)=x(\pi-x)$ określonej na $[0,\pi]$. Pokazać, że

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

3. Obliczyć $\widehat{D_n}(k)$ oraz $\widehat{K_n}(k)$ dla $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$.

4. Niech $P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}$. Obliczyć $\widehat{P_r}(n)$.
`Wskazówka:` Patrz zadanie 16 z listy 1.

5. Funkcja zespolona $f(x)$ spełnia warunek Lipschitza $|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|$ dla wszystkich $x\in\mathbb{R}$. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = f(x).$$

6. Funkcja zespolona $f(x)$ jest ciągła o okresie 2π. Pokazać, że $\widehat{f}(-n) = \overline{\widehat{f}(n)}$ dla każdego n wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją rzeczywistą.

7. Obliczyć $e^{inx} * e^{imx}$, $D_n * D_n$, $f * e^{inx}$ i $P_r * f$, gdzie f jest funkcją o okresie 2π całkowalną w sensie Riemanna, lub całkowalną w sensie Lebesgue'a na przedziale $[0,2\pi]$

8. Dla funkcji $f(x)$ jak w poprzednim zadaniu określamy $f_x(y) = f(x+y)$. Obliczyć $\widehat{f_x}(n)$.

9. Pokazać, że dla funkcji zespolonej $f(x)$ jak w poprzednim zadaniu mamy $\widehat{f}(n)\to 0$, gdy $|n|\to\infty$.

10. Pokazać, że jeśli funkcja $f(x)$ jest klasy C^1 o okresie 2π, to $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$. Czy wystarczy, aby $f(x)$ była kawałkami klasy C^1 na przedziale $[0,2\pi]$?

11. Pokazać, że jeżeli $f(x)$ jest funkcją o okresie 2π klasy C^1, to

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < +\infty.$$

`Wskazówka:` Z równości Parsevala dla funkcji $f'(x)$ i z poprzedniego zadania mamy

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n^2|\widehat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Następnie skorzystać z nierówności $2|z| \leqslant \frac{1}{n^2} + n^2|z|^2$.

12. Ciąg $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ma własność, że $c_n\to 0$, gdy $|n|\to\infty$. Czy istnieje zespolona funkcja $f(x)$ całkowalna w sensie Lebesgue'a na przedziale $[0,2\pi]$ taka, że $\widehat{f}(n) = c_n$ dla każdego $n\in\mathbb{Z}$? `Wskazówka:` Patrz zadanie 10 z listy 2.

13. Funkcja $f(x)$ o okresie 2π jest ciągła. Pokazać, że jeśli $f(x)$ jest nieujemna, to jej ciąg zespolonych współczynników Fouriera jest dodatnio określony, tzn.

$$\sum_{n,m=0}^{N} \widehat{f}(n-m) z_n \overline{z_m} \geqslant 0$$

dla każdego ciągu liczb zespolonych $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ i dowolnej liczby naturalnej N. Pokazać, że również implikacja odwrotna jest prawdziwa. `Wskazówka:` Przy dowodzie implikacji odwrotnej zauważyć, że

$$\sigma_N(f,x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n,m=0}^{N} \widehat{f}(n-m) e^{inx} \overline{e^{imx}}.$$

14. Funkcja $f(x)$ jest ciągła o okresie 2π. Pokazać, że jeśli

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N}^{N} |n||\widehat{f}(n)| = 0,$$

to ciąg sum częściowych szeregu Fouriera $s_n(f,x)$ jest zbieżny jednostajnie do $f(x)$. `Wskazówka:` Pokazać, że $\sigma_n(f,x) - s_n(f,x)$ dąży jednostajnie do 0.

15. Ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazywamy wypukłym, jeśli $a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2})$. Pokazać, że jeśli ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest wypukły oraz $a_n \to 0$, to szereg

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

jest zbieżny dla $x \neq 2k\pi$. Pokazać, że $f(x)$ jest nieujemną funkcją ciągłą i całkowalną na przedziale $(0, 2\pi)$. Wywnioskować, że szereg

$$f(x) = \frac{1}{2\log 2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log(n+2)}$$

jest zbieżny do nieujemnej funkcji całkowalnej na przedziale $(0, 2\pi)$. `Wskazówka:` Korzystając ze wzorów $2\cos nx = D_n(x) - D_{n-1}(x)$ oraz $D_n(x) = (n+1)K_n(x) - nK_{n-1}(x)$ zastosować dwukrotnie przekształcenie Abela aby otrzymać

$$2f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) D_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a_{n+2} - 2a_{n+1})(n+1) K_n(x).$$