5. Zadania do wykładu
Szeregi i całki Fouriera

1. Udowodnić nierówność Wirtingera-Poincaré'ego: dla każdej funkcji klasy C^1 na przedziale $[a,b]$ takiej, że $f(a)=f(b)=0$ zachodzi

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(x)|^2\,dx.$$

Pokazać, że stała w nierówności jest optymalna. `Wskazówka:` Pokazać, że wystarczy rozważyć przypadek $a=0$ i $b=\pi$. Rozszerzyć $f(x)$ do funkcji nieparzystej o okresie 2π i zastosować wzór Parsevala.

2. Udowodnić twierdzenie izoperymetryczne: spośród zamkniętych krzywych płaskich klasy C^1, bez samoprzecięć, o danej długości, okrąg jest brzegiem obszaru o największym polu. Tzn. załóżmy, że $C=\{(x(t),y(t))\,|\,0\leqslant t\leqslant\pi\}$ jest krzywą klasy C^1, bez samoprzecięć, spełniającą $x(0)=x(2\pi)$, $y(0)=y(2\pi)$. Wtedy długość L krzywej i pole A obszaru ograniczonego tą krzywą wyrażają się wzorami

$$L=\int_0^{2\pi}[(x')^2+(y')^2]^{1/2}\,dt,\qquad A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'-x'y)\,dt.$$

Pokazać, że $4\pi A\leqslant L^2$ i równość zachodzi tylko w przypadku, gdy krzywa jest okręgiem. `Wskazówka:` Można założyć, że krzywa jest sparametryzowana długością, tzn. $(x'(t))^2+(y'(t))^2=1$. Wtedy $L=\int_0^{2\pi}[(x')^2+(y')^2]\,dt$. Wyrazić wielkości A i L za pomocą rzeczywistych współczynników Fouriera funkcji x, y, x' i y'.

3. Sprawdzić, że równanie różniczkowe $y''=a^2y$ nie posiada rozwiązania spełniającego $y(0)=0$ i $y(\pi)=0$.

4. Rozwiązać równanie struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

przy warunkach $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $u(x,0)=f(x)$ oraz $(\partial u/\partial t)(x,0)=g(x)$, gdzie $f\in C^2[0,\pi]$, $g\in C^1[0,\pi]$.

5. Rozwiązać równanie ciepła

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

przy warunkach $u(0,t)=u(2\pi,t)$ oraz $u(x,0)=f(x)$ dla $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą o własności $f(0)=f(2\pi)$. `Wskazówka:` Znaleźć u w postaci

$$u(x,t)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(t)e^{inx}.$$

6. Funkcja ciągła $f(x)$ ma okres 2π. Pokazać, że dla liczby rzeczywistej a, niewspółmiernej z π mamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x+ka)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx.$$

`Wskazówka:` Sprawdzić wzór dla $f(x)=e^{imx}$, gdzie $m\in\mathbb{Z}$. Czy założenie niewspółmierności jest istotne ?

7. Dla ciągu liczb $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z przedziału $[0,2\pi]$, przedziału $[a,b]\subset[0,2\pi]$ i liczby naturalnej N symbol $N_{[a,b]}$ oznacza liczbę wyrazów ciągu spośród $x_1,x_2,\ldots,x_N$, które należą do $[a,b]$. Ciąg nazywamy równo rozłożonym jeśli spełniony jest warunek

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N_{[a,b]}}{N}=b-a$$

dla dowolnego przedziału $[a, b] \subset [0, 1]$. Pokazać, że ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest równo rozłożony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

dla dowolnej funkcji $f(x)$ całkowalnej w sensie Riemanna na przedziale $[0, 1]$. `Wskazówka:` Zbadać wzór najpierw dla funkcji schodkowych.

8. Z poprzednich dwu zadań wywnioskować, że ciąg $x_n = na - [na]$ jest równo rozłożony w przedziale $[0, 1]$ dla dowolnej liczby niewymiernej a.

9. Czy liczba 2^n w zapisie dziesiętnym może mieć cyfrę 7 z lewej strony ? Która z cyfr 7 czy 8 występuje częściej z lewej strony ?

$*$**10.** Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą o okresie 2π. Określmy $\|g\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |g(x)|\,dx$. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^{*n}\|_1} = \max_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|.$$

`Wskazówka:` Założyć najpierw, że $f(x)$ jest wielomianem trygonometrycznym postaci $\displaystyle\sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$.