1. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Pokazać, że szachownica $m \times n$ ma doskonałe pokrycie kostkami domino jeśli iloczyn mn jest liczbą parzystą. Przypuśćmy, że mn jest liczbą nieparzystą i, że lewy górny róg szachownicy jest biały. Pokazać, że po usunięciu dowolnego białego pola, otrzymana dziurawa szachownica ma doskonałe pokrycie.

2. Więzienie składa się z 64 cel umieszczonych na planie szachownicy 8×8. Sąsiednie cele połączone są drzwiami. Więźniowi, znajdującemu się w jednej z narożnych cel, obiecano wolność, jeśli przedostanie się do celi po przeciwnej stronie przekątnej przechodząc po drodze przez każdą celę jeden raz. Czy więzień może uzyskać wolność [1] ?

3. Niech $f(n)$ oznacza liczbę różnych doskonałych pokryć szachownicy $2 \times n$. Obliczyć $f(1), f(2), f(3), f(4)$ i $f(5)$. Znaleźć prosty związek jaki spełniają liczby $f(n)$. Korzystając z tego związku obliczyć $f(12)$.

4. Znaleźć liczbę różnych doskonałych pokryć szachownicy 3×4.

5. Znaleźć sposób przecięcia sześcianu o krawędzi 3 cm na 27 sześcianów o krawędzi 1 cm, wykonując 6 cięć, ale dokonując nietrywialnego przestawienia części pomiędzy dwoma cięciami.

6. Trójwymiarowym dominem nazywamy dwa sześciany wymiaru 1×1 sklejone wzdłuż ściany. Pokazać, że jeśli n jest liczbą nieparzystą to sześcianu o krawędzi n nie można złożyć z kostek domina. Pokazać, że stanie się to możliwe po usunięciu jednego sześcianu o krawędzie 1. `Wskazówka:` Sześcian o krawędzi n składa się z n^3 kostek o krawędzi 1, które można pokolorować na przemian na biało i czarno.

7. Pokazać, że nie istnieje kwadrat magiczny rzędu 2.

8. Stosując metodę Loubère'a skonstruować kwadraty magiczne rzędu 7 i 9.

9. Skonstruować kwadrat magiczny rzędu 6.

10. Pokazać, że kwadrat magiczny rzędu 3 musi mieć liczbę 5 w środku. Wywnioskować, że jest 8 kwadratów magicznych rzędu 3.

---

[1] Naczelnik więzienia ukończył kurs z kombinatoryki.

11. Czy można uzupełnić podany kwadrat do kwadratu magicznego rzędu 4 ?

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & & \\ 4 & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

12. Pokazać, że zastępując każdą liczbę całkowitą a liczbą $n^2 + 1 - a$ w kwadracie magicznym rzędu n, otrzymamy kwadrat magiczny rzędu n.

13. Skonstruować dwa ortogonalne kwadraty łacińskie rzędu 4.

14. Skonstruować kwadraty łacińskie rzędu 5 i 6.

15. Znaleźć ogólną metodę konstrukcji kwadratu łacińskiego rzędu n.

16. Czy istnieje magiczny sześciokąt rzędu 2 tak, że liczby $1, 2, \ldots, 7$ można ustawić w sześciokątnej tablicy tak, aby sumy we wszystkich dziewięciu liniach były równe ?

$$\begin{array}{ccccc} & a & & b & \\ c & & d & & e \\ & g & & h & \end{array}$$

17. Niech n będzie liczbą podzielną przez 4, $n = 4m$. Konstruujemy tablicę $n \times n$ w następujący sposób.

(a) Postępując od lewa do prawa i od pierwszego wiersza do n-tego, wpisujemy w tablicę liczby 1,2,$\ldots$, n^2 po kolei.

(b) Dzielimy otrzymaną tablicę na m^2 tablic 4×4. W każdej z tych mniejszych tablic zastępujemy każdą liczbę a na dwu przekątnych jej "dopełnieniem" $n^2 + 1 - a$.

Pokazać, że w wyniku otrzymamy magiczny kwadrat dla $n = 4$ i dla $n = 8$.

$*$**18.** Szachownica 6×6 jest pokryta doskonale przez 18 kostek domino. Udowodnić, że można ją przeciąć pionowo lub poziomo na dwie części, nie przecinając żadnej kostki.