

10. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Chcemy wymnożyć n liczb x_1, x_2, \dots, x_n w podanej kolejności. Obliczenie wymaga wykonania $n - 1$ mnożeń dwu czynników. Pokazać bezpośrednio, że ilość a_n tych sposobów jest równa liczbie podziałów $(n + 1)$ -kąta wypukłego na n trójkątów.
2. Za pomocą dzielenia wielomianów wyznaczyć pierwszych 6 wyrazów ciągu, którego funkcją tworzącą jest

(a) $\frac{1 + 2x}{1 + 3x + x^2}$.

(b) $\frac{1 + 3x^2}{1 + 2x + x^2 + 5x^4}$.

(c) $\frac{2 + 3x + x^2}{3 + x + 2x^4}$.

3. Wyznaczyć wykładniczą funkcję tworzącą ciągu $1!, 2!, 3!, \dots, n!, \dots$.
4. Dla liczby rzeczywistej α określamy ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ wzorem $a_0 = 1$ oraz $a_n = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)$. Znaleźć wykładniczą funkcję tworzącą tego ciągu.
5. Niech S będzie multizbiorem $\{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \dots, \infty \cdot e_k\}$. Wyznaczyć wykładniczą funkcję tworzącą ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takiego, że $a_0 = 1$ oraz
 - (a) a_n jest liczbą n -permutacji multizbioru S , w których każdy element pojawia się nieparzystą liczbę razy.
 - (b) a_n jest liczbą n -permutacji multizbioru S , w których każdy element pojawia się przynajmniej 4 razy.
 - (c) a_n jest liczbą n -permutacji multizbioru S , w których e_1 pojawia się przynajmniej raz, e_2 pojawia się przynajmniej dwa razy, \dots , e_k pojawia się przynajmniej k razy.
 - (d) a_n jest liczbą n -permutacji multizbioru S , w których e_1 pojawia się co najwyżej raz, e_2 pojawia się co najwyżej dwa razy, \dots , e_k pojawia się co najwyżej k razy.
6. Wyznaczyć liczbę sposobów pokolorowania szachownicy $1 \times n$ używając kolorów czerwonego, niebieskiego, zielonego oraz pomarańczowego przy założeniu, że
 - (a) parzysta liczba pól ma być koloru czerwonego i parzysta liczba pól ma być koloru zielonego;

- (b) nieparzysta liczba pól ma być koloru czerwonego i parzysta liczba pól ma być koloru pomarańczowego.

Wskazówka: Niech a_n oznacza liczbę tych sposobów. Wyznaczyć wykładniczą funkcję tworzącą i następnie znaleźć współczynnik przy $x^n/n!$.

7. Wyznaczyć ilość liczb o n cyfrach, nie mniejszych niż 4, w których 4 i 6 występują parzystą liczbę razy, 5 i 7 pojawiają się przynajmniej raz, i nie ma żadnych ograniczeń dotyczących 8 i 9.
8. Znaleźć liczbę sposobów rozdzielenia 10 różnych zabawek pomiędzy czworo różnych dzieci jeśli
- (a) Pierwsze dziecko otrzymuje przynajmniej jedną zabawkę.
 - (b) Drugie dziecko otrzymuje przynajmniej dwie zabawki.
 - (c) Pierwsze dziecko otrzymuje przynajmniej jedną zabawkę a drugie dziecko otrzymuje przynajmniej dwie zabawki.

Wskazówka: Założyć, że liczba zabawek wynosi n . Niech a_n oznacza liczbę sposobów rozdzielenia zabawek. Znaleźć wykładniczą funkcję tworzącą liczb a_n . Obliczyć współczynnik przy $x^{10}/10!$.

9. Znaleźć ilość liczb n -cyfrowych, o cyfrach równych 1, 2, 3 lub 4, w których cyfry 1 i 2 pojawiają się w sumie parzystą ilość razy.