11. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Szachownica o wymiarach 4×5 ma pewne pola zabronione jak na rysunku poniżej.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
x_1		X				
x_2			X		X	5
x_3	X		X		X	
x_4	X					

Chcemy umieścić na szachownicy jak największą liczbę nie atakujących się wież. Narysować graf dwudzielny związany z tym zagadnieniem. Pokazać, że zbiór krawędzi $M = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_4\}, \{x_4, y_2\}\}$ jest skojarzeniem. Znaleźć skojarzenie maksymalne.

2. Dla szachownicy poniżej wyznaczyć graf dwudzielny G i znaleźć 6 pól, w których można umieścić nie atakujące się wieże.

			X	X	
X			X		
X					X
X	X	X		X	
X	X				
		X	X		

3. Rozważmy szachownicę z zadania 1, której pola zostały pomalowane na przemian na biało i czarno. Oznaczamy nie zabronione białe pola symbolami $b_1, b_2, \ldots, b_7$ a czarne pola symbolami $c_1, c_2 \ldots, c_6$ tak jak na rysunku.

b_1	X	b_2	c_1	b_3
c_2	b_4	X	b_5	X
X	c_3	X	c_4	X
X	b_6	c_5	b_7	c_6

Chcemy położyć na szachownicy jak największą liczbę kostek domino. Narysować graf dwudzielny związany z tym zagadnieniem. Pokazać, że $M = \{\{b_1, c_2\}, \{b_3, c_1\}, \{b_6, c_3\}, \{b_7, c_4\}\}$ jest skojarzeniem. Znaleźć skojarzenie maksymalne.

4. Wyznaczyć dominowy graf dwudzielny dla szachownicy z zadania 2. Znaleźć skojarzenie złożone z 10 krawędzi i związane z nim doskonałe pokrycie szachownicy kostkami domino.

5. Pokazać, że przykład 4 osób starających się o 5 posad, omówiony na wykładzie jest równoważny zagadnieniu z zadania 1. Narysować odpowiednią szachownicę.

6. Szachownica ma wymiar $m \times n$, przy czym przynajmniej jedna z liczb m lub n jest parzysta oraz $m, n \geqslant 2$. Pokazać, że jeśli dokładnie jedno pole białe i jedno czarne są zabronione, to otrzymana szachownica posiada doskonałe pokrycie kostkami domino (porównać z zadaniem 1 z listy 1).

7. $G = (X, \Delta, Y)$ jest grafem dwudzielnym o własności, że każdy wierzchołek z X należy do przynajmniej p krawędzi oraz każdy wierzchołek z Y należy do co najwyżej p krawędzi. Poprzez przeliczenie krawędzi pokazać, że $|Y| \geqslant |X|$.

8. Graf dwudzielny $G = (X, \Delta, Y)$ nazywamy regularnym stopnia p, jeśli każdy wierzchołek należy do dokładnie p krawędzi. Pokazać, że jeśli graf G jest regularny oraz $|X| = |Y| = n$, to istnieje skojarzenie M złożone z n krawędzi. Takie skojarzenie nazywamy doskonałym.

9. Rozważmy szachownicę $n \times n$ z pewnymi zabronionymi polami, o własności, że każdy wiersz i każda kolumna ma dokładnie p nie zabronionych pól. Pokazać, że na szachownicy można umieścić n nie atakujących się wież.