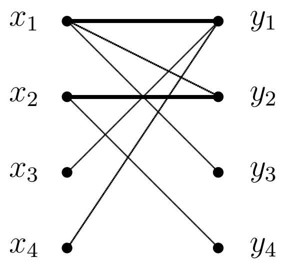
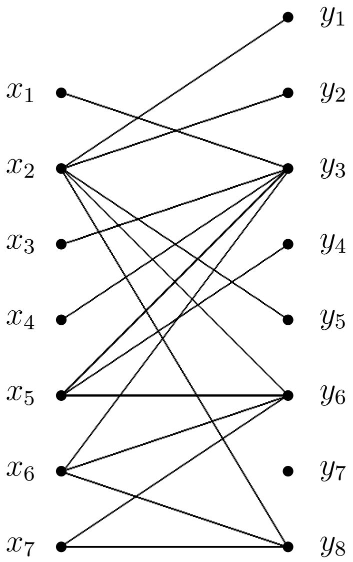
12. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Pokazać, że w grafie narysowanym poniżej maksymalne skojarzenie zawiera 3 krawędzie. Pokazać, że skojarzenia $M = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}\}$ nie można powiększyć do skojarzenia o 3 krawędziach. Znaleźć łańcuch naprzemienny względem M, i użyć go do znalezienia skojarzenia o 3 krawędziach.

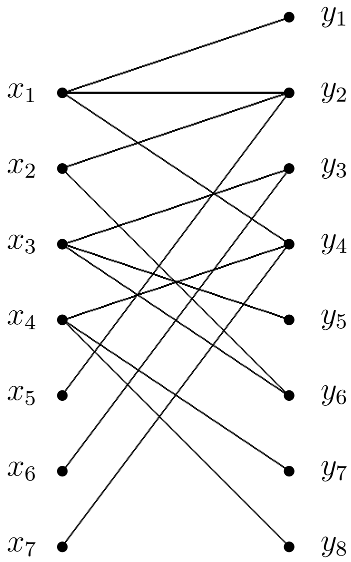


2. Znaleźć maksymalne skojarzenie M dla podanych grafów dwudzielnych stosując algorytm podany na wykładzie. W każdym przypadku wyznaczyć zbiór S pokrywający krawędzie o własności $|M| = |S|$.

(a)



(b)



3. Firma ma 7 wolnych posad $y_1, y_2, \ldots, y_7$, o które stara się 10 kandydatów $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Kandydaci mają kwalifikacje do wykonywania następujących zawodów (wg kolejności): $\{y_1, y_2, y_6\}$, $\{y_2, y_6, y_7\}$, $\{y_3, y_4\}$, $\{y_1, y_5\}$, $\{y_6, y_7\}$, $\{y_3\}$, $\{y_2, y_3\}$, $\{y_1, y_3\}$, $\{y_1\}$, $\{y_5\}$. Jaka jest największa liczba posad, która może zostać wypełniona ?

4. Niech $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_6)$, gdzie

$$\begin{array}{lll} A_1 = \{a, b, c\}, & A_2 = \{a, b, c, d, e\}, & A_3 = \{a, b\}, \\ A_4 = \{b, c\}, & A_5 = \{a\}, & A_6 = \{a, c, e\}. \end{array}$$

Czy rodzina $\mathcal{A}$ posiada SRR ? Jeśli nie, to wyznaczyć największą liczbę zbiorów rodziny posiadającą SRR.

5. Niech $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_6)$, gdzie

$$\begin{array}{lll} A_1 = \{1, 2\}, & A_2 = \{2, 3\}, & A_3 = \{3, 4\}, \\ A_4 = \{4, 5\}, & A_5 = \{5, 6\}, & A_6 = \{6, 1\}. \end{array}$$

Znaleźć liczbę różnych SRR dla rodziny $\mathcal{A}$. Uogólnić to na n zbiorów.

6. Niech $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ będzie rodziną zbiorów z SRR. Niech x będzie elementem z A_1. Pokazać, że istnieje SRR zawierający x, ale pokazać na przykładzie, że może nie istnieć SRR, w którym x reprezentuje A_1.

7. Niech $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ będzie rodziną zbiorów spełniającą silniejszy Warunek Małżeństw. Tzn. załóżmy, że

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}| \geqslant k + 1$$

dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ i dowolnego wyboru k różnych indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Niech x będzie elementem z A_1. Pokazać, że $\mathcal{A}$ ma SRR, w którym x reprezentuje A_1.

8. Niech $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie

$$A_i = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pokazać, że $\mathcal{A}$ posiada SRR oraz liczba różnych SRR jest równa n-tej liczbie nieporządków D_n.

9. Rozważmy szachownicę z zabronionymi polami o własności, że jeśli pole jest zabronione, to również każde pole na prawo i pod spodem jest zabronione. Pokazać, że szachownica ma doskonałe pokrycie kostkami domina, jeśli liczba białych pól jest równa liczbie czarnych pól.