13. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Pokazać, że jeśli dwa wierzchołki grafu są połączone łańcuchem, to można je połączyć łańcuchem elementarnym.

2. Załóżmy, że x i y są wierzchołkami cyklu γ. Czy x i y są wierzchołkami cyklu elementarnego.

3. Pokazać, że krawędzie cyklu można podzielić na podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tak, że krawędzie w A_i tworzą cykl elementarny.

4. Pokazać, że jeśli graf posiada cykl długości nieparzystej, to posiada również cykl elementarny długości nieparzystej.

5. Pokazać, że każdy wierzchołek cyklu γ należy do parzystej liczby krawędzi z γ podczas, gdy każdy wierzchołek cyklu elementarnego należy do 2 krawędzi tego cyklu.

6. Niech γ będzie łańcuchem łączącym dwa różne wierzchołki x i y. Pokazać, że x i y należą do nieparzystej liczby krawędzi z γ podczas, gdy pozostałe wierzchołki z γ należą do parzystej liczby krawędzi z γ.

7. Dla wierzchołków grafu G wprowadzamy relację $x \sim y$ jeśli $x = y$ lub $x \neq y$ i x można połączyć z y łańcuchem. Pokazać, że $\sim$ jest relacją równoważności, tzn.

(i) $x \sim x$.

(ii) Z $x \sim y$ wynika, że $y \sim x$.

(iii) Z $x \sim y$ i $y \sim z$ wynika, że $x \sim z$.

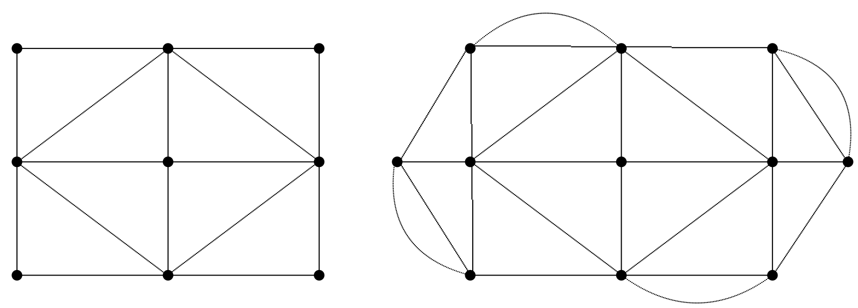
8. (c.d. zadania 7) Dla wierzchołka x niech $C(x)$ oznacza zbiór wierzchołków z takich, że $x \sim z$, tzn. $C(x)$ jest klasą równoważności wierzchołka x. Pokazać, że $C(x) = C(y)$ albo $C(x) \cap C(y) = \emptyset$. Pokazać, że jeśli $C(x) \cap C(y) = \emptyset$, to żaden wierzchołek z $C(x)$ nie może być połączony łańcuchem z wierzchołkiem z $C(y)$.

9. (c.d. zadania 8) Dla wierzchołka x niech G_x oznacza graf, którego zbiorem wierzchołków jest $C(x)$ i którego krawędziami są wszystkie krawędzie grafu G, łączące dwa wierzchołki z $C(x)$. Pokazać, że G_x jest spójny. Graf G_x nazywamy spójną komponentą grafu G. Wywnioskować z zadania 8, że wierzchołki leżące w różnych spójnych komponentach nie mogą być połączone łańcuchem.

10. Niech G będzie grafem, w którym stopień każdego wierzchołka jest nie mniejszy niż 2. Pokazać, że G posiada cykl elementarny.

11. Pokazać, że prosty graf o n wierzchołkach, o liczbie krawędzi większej niż $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ jest spójny. Podać przykład prostego grafu o n wierzchołkach, o liczbie krawędzi równej $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, który nie jest spójny.

12. Który z podanych niżej grafów posiada cykl Eulera ? Skonstruować cykl Eulera, gdy jest to możliwe.

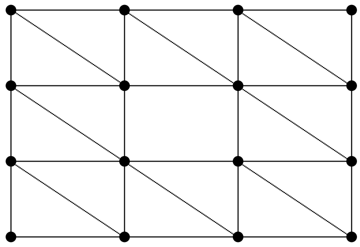


13. Grafem zupełnym K_n nazywamy prosty graf o n wierzchołkach, w którym dowolne dwa wierzchołki są połączone krawędzią. Dla jakich wartości n graf K_n posiada cykl Eulera ?

14. Niech G będzie grafem w którym tylko dwa wierzchołki x i y mają stopień nieparzysty. Niech G^* oznacza graf powstały z G przez dodanie nowej krawędzi łączącej x z y. Pokazać, że G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy G^* jest spójny.

15. Niech G będzie grafem spójnym takim posiadającym dokładnie $2k$, $(k \geqslant 1)$ wierzchołków nieparzystego stopnia. Pokazać, że krawędzie grafu G można podzielić na podzbiory $E_1, E_2, \ldots, E_k$ takie, że istnieje łańcuch γ_i, którego krawędziami są krawędzie z E_i, dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

16. Zastosować zadanie 15 dla pierwszego grafu z zadania 12 oraz dla grafu poniżej.



17. Przejechać poniższe grafy bez odrywania ołówka od papieru i bez przejeżdżania dwukrotnie po żadnej krawędzi.