2. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Pokazać, że arcymistrz szachowy z przykładu podanego na wykładzie, zagra dokładnie k partii w pewnej liczbie kolejnych dni, dla każdej liczby $k = 1, 2, \ldots, 21$. Czy można wywnioskować, że w pewnej liczbie kolejnych dni arcymistrz zagra dokładnie 22 partie ?

∗2. Wybrać 100 liczb całkowitych spośród liczb 1,2,. . . , 200 tak, że żadna z nich nie jest podzielna przez inną.

∗3. Pokazać, że wśród 52 liczb całkowitych znajdują się dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 100.

4. Studentka ma 37 dni na przygotowanie się do egzaminu. Z doświadczenia wie, że wystarczy jej 60 godzin "kucia" na przygotowanie się. Chce uczyć się przynajmniej 1 godzinę dziennie. Pokazać, że niezależnie jak zaplanuje sobie czas uczenia się (jednakże całkowitą liczbę godzin dziennie) będzie istniał ciąg dni, w czasie których studentka będzie uczyła się dokładnie 13 godzin.

5. Pokazać na przykładzie, że Chińskie Twierdzenie o Resztach nie zachodzi, gdy m i n nie są względnie pierwsze.

6. 41 wież umieszczono na szachownicy 10×10. Pokazać, że można znaleźć 5 wież, które się nie atakują. `Wskazówka:` Zwinąć szachownicę w cylinder łącząc przeciwne strony i pokolorować przekątne 10 kolorami.

7. Pewna organizacja złożona z n członków ($n > 5$) ma $n + 1$ trzyosobowych komitetów, o różnych składach. Pokazać, że są dwa komitety mające tylko jednego wspólnego członka.

8. Pokazać, że wśród 15 różnych liczb naturalnych nie przekraczających 100, są 4 liczby a, b, c, d takie, że $a+b = c+d$ lub 3 liczby a, b, c tworzące postęp arytmetyczny.

9. Pokazać, że w grupie n ludzi są dwaj, którzy mają tę samą liczbę znajomych w grupie.

10. Na przyjęcie przyszło 100 osób. Każda osoba ma (być może 0) parzystą liczbę znajomych. Pokazać, że są przynajmniej 3 osoby mające tyle samo znajomych.

11. Pokazać, że wśród 5 punktów w kwadracie o boku 2 są dwa, których odległość nie przekracza $\sqrt{2}$.

12. (a) Udowodnić, że wśród 5 punktów trójkąta równobocznego o boku 1 są dwa, których odległość nie przekracza $\frac{1}{2}$.

(b) Udowodnić, że wśród 10 punktów trójkąta równobocznego o boku 1 są dwa, których odległość nie przekracza $\frac{1}{3}$.

(c) Wyznaczyć liczbę całkowitą m_n taką, że wśród m_n punktów trójkąta równobocznego o boku 1 są dwa, których odległość nie przekracza $\frac{1}{n}$.

13. Pokazać, że $N(3,3,3;2) \leqslant 17$.

$*$**14.** Pokazać, że $N(3,3,3;2) \geqslant 17$, wskazując sposób pokolorowania trzema kolorami (czerwonym, niebieskim i żółtym) odcinków łączących 16 punktów tak, aby nie było trzech punktów połączonych pomiędzy sobą odcinkami jednego koloru.

15. Udowodnić, że

$$N(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k+1};2) \leqslant (k+1)[N(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k};2)-1]+2.$$

Znaleźć górne oszacowanie liczby $N(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{n};2)$.

16. Turniej szachowy systemem każdy z każdym, w którym startowało 66 graczy, odbywał się w 4 miastach. Pokazać, że trzej gracze rozegrali wszystkie trzy partie pomiędzy sobą w tym samym mieście.

17. Pokazać, że wśród $n+1$ liczb wybranych z $1,2,3,\ldots,2n$ są dwie względnie pierwsze.