3. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Dla dowolnego z czterech układów dwu własności (a) i (b) znaleźć ilość 4-cyfrowych liczb, których cyframi są 1, 2, 3, 4 lub 5:

(a) Cyfry są różne.
(b) Liczba jest parzysta.

2. Ile jest sposobów potasowania talii 52 kart ?

3. Ile jest różnych układów pokerowych ? (5 kart z talii 52 kart).

4. Ile różnych dodatnich dzielników mają podane liczby ?

(a) $3^4 \times 5^2 \times 7^3 \times 11$.
(b) 620.

5. Ile zer na końcu ma liczba 50! ?

6. Ile liczb większych od 5400 posiada obie podane niżej własności ?

(a) Cyfry są różne.
(b) Nie ma w zapisie cyfr 2 i 7.

7. Na ile sposobów można posadzić 6 panów i 6 pań przy okrągłym stole, jeśli panie i panowie mają siedzieć na przemian ?

8. Na ile sposobów można posadzić 12 osób przy okrągłym stole, jeśli pewna para osób odmawia siedzenia obok siebie ?

9. Czterosobowy komitet ma być wybrany spośród członków klubu, który składa się z 10 panów i 12 pań. Na ile sposobów można utworzyć komitet, jeśli musi on zawierać przynajmniej dwie panie ? Na ile sposobów, jeśli dodatkowo Pani Ładna i Pan Przystojny odmawiają być razem w komitecie ?

10. Ile zbiorów złożonych z 3 liczb można utworzyć spośród liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, jeśli zbiór nie może zawierać dwu kolejnych liczb ?

11. Drużyna piłkarska złożona z 11 graczy ma być wybrana spośród 15 zawodników, wśród których 5 gra tylko w obronie, 8 gra w ataku i 2 może grać i w obronie i w ataku. Przyjmując, że w drużynie 7 zawodników gra w ataku i 4 w obronie, ile można utworzyć drużyn piłkarskich ?

12. Klasa ma dwa rzędy po 8 krzeseł. Jest 14 studentów, z których 5 zawsze siedzi w pierwszym rzędzie, 4 siedzi zawsze w tylnym rzędzie. Na ile sposobów można rozmieścić studentów ?

13. W przestrzeni danych jest 25 punktów, żadne 4 nie leżące na jednej płaszczyźnie. Ile trójkątów o wierzchołkach w tych punktach można utworzyć ? Ile czworościanów ?

14. Udowodnić, że $C(n, r) = C(n, n - r)$ używając argumentacji kombinatorycznej, a nie używając wzoru z wykładu.

15. Na ile sposobów można umieścić 8 wież na szachownicy tak, że żadna wieża nie atakuje innej (tzn. dwie wieże nie mogą znajdować się na jednej linii pionowej lub poziomej) ? Na ile sposobów, jeśli każda wieża jest inaczej oznaczona ?

16. Wyznaczyć liczbę permutacji liter w swoim nazwisku. `Uwaga:` W zależności od nazwiska będziemy mieli do czynienia ze zbiorem lub z multizbiorem.

17. Mamy 5 identycznych wież koloru czerwonego i 3 koloru niebieskiego.

(a) Na ile sposobów można je umieścić na szachownicy, aby się nie atakowały ?

(b) Na ile sposobów można je umieścić na szachownicy 12 na 12, aby się nie atakowały ?

18. Sekretarka pracuje w budynku położonym 9 przecznic na wschód i 7 na północ od swojego domu. Codziennie przechodząc do pracy przechodzi 16 odcinków ulic. Ile jest możliwych tras ? Załóżmy, że odcinek ulicy w kierunku wschodnim, zaczynający się 4 przecznice na wschód i 3 na północ, został zalany, a sekretarka nie umie (lub nie chce) pływać. Ile jest wtedy możliwych tras ?

19. Niech S będzie multizbiorem z liczbami powtórzeń $n_1, n_2, \ldots, n_k$, gdzie $n_1 = 1$. Pokazać, że przy oznaczeniu $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ liczba permutacji kołowych tego multizbioru wynosi

$$\frac{(n-1)!}{n_2! \cdots n_k!},$$