4. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Wyznaczyć liczbę permutacji kołowych cyfr $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9$, w których 0 i 9 nie leżą naprzeciwko. `Wskazówka:` Zliczyć te, w których 0 i 9 leżą naprzeciwko.

2. W lidze piłkarskiej gra 15 drużyn. Po zakończonych rozgrywkach ligowych najlepsze trzy drużyny otrzymują złoty, srebrny i brązowy medal a trzy ostatnie spadają do niższej ligi. Dwa wyniki rozgrywek uznajemy za takie same jeśli drużyny, które otrzymały złoty, srebrny i brązowy nedal i drużyny, które spadły do niższej ligi są te same w obu przypadkach. Ile może być różnych wyników rozgrywek ?

3. Wyznaczyć liczbę 11-permutacji multizbioru $S = \{3 \cdot a,\ 4 \cdot b,\ 5 \cdot c\}$.

4. Wyznaczyć liczbę 10-permutacji multizbioru $S = \{3 \cdot a,\ 4 \cdot b,\ 5 \cdot c\}$.

5. Wyznaczyć liczbę 11-permutacji multizbioru $S = \{3 \cdot a,\ 3 \cdot b,\ 3 \cdot c,\ 3 \cdot d\}$.

6. Wypisać wszystkie 3-kombinacje i 4-kombinacje multizbioru $\{2 \cdot a,\ 1 \cdot b,\ 3 \cdot c\}$.

7. Wyznaczyć liczbę wszystkich kombinacji (dowolnego rozmiaru) multizbioru o k różnych elementach, ze skończonymi liczbami powtórzeń $n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k$.

8. W Tłusty Czwartek piekarnia sprzedawała 6 rodzajów ciastek. Ile różnych tuzinów ciastek można było kupić ?

9. Na ile sposobów można rozdzielić 12 identycznych jabłek i 1 pomarańczę pomiędzy troje dzieci tak, aby każde dziecko otrzymało przynajmniej jeden owoc ?

10. Wyznaczyć liczbę r-kombinacji multizbioru $\{1 \cdot a_1,\ \infty \cdot a_2,\ \ldots,\ \infty \cdot a_k\}$. Ogólniej, wyprowadzić wzór na liczbę r-kombinacji multizbioru, w którym liczby powtórzeń są równe 1 lub ∞.

11. Pokazać, że liczba podziałów n ryb pomiędzy k fok wynosi $C(k-1+n, n)$.

12. Pokazać, że liczba sposobów rozdzielenia n różnych zabawek pomiędzy k dzieci, przy czym pierwsze dziecko otrzymuje n_1 zabawek, drugie otrzymuje n_2 zabawek, ..., k-te otrzymuje n_k zabawek, wynosi

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

13. Pokazać, że liczba r-kombinacji multizbioru $S = \{\infty \cdot a_1,\ \infty \cdot a_2,\ \ldots,\ \infty \cdot a_k\}$, w których każdy element $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ występuje przynajmniej raz, jest równa liczbie rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = r$$

w dodatnich liczbach całkowitych. Pokazać, że z kolei liczba tychże rozwiązań jest równa liczbie $(k-1)$-kombinacji zbioru $(r-1)$-elementowego. `Wskazówka:` Zapisać r jedynek kolejno. Pomiędzy nimi jest $r-1$ miejsc. Aby podzielić te jedynki na k niepustych grup wystarczy wybrać $k-1$ miejsc spośród $r-1$ miejsc pomiędzy jedynkami i wstawić tam symbol $*$. Wtedy sumy jedynek w odpowiednich grupach wyznaczą $x_1,\ x_2\ \ldots,\ x_k$.