5. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

**1.** Wyprowadzić wzór Pascala korzystając ze wzoru na współczynniki Newtona.

**2.** Wypisać wyrazy w wierszach trójkąta Pascala dla $n = 9$ i 10.

**3.** Obliczyć sumy wyrazów trójkąta Pascala wzdłuż przekątnej biegnącej w górę od lewej strony. Kilka pierwszych to 1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 1+3+1=5, 1+4+3=8. Obliczyć kilka następnych sum i znaleźć związek pomiędzy tymi sumami. Porównać z wynikiem zadania 3 z listy 1.

**4.** Rozwinąć $(x+y)^5$ i $(x+y)^6$ korzystając ze wzoru dwumianowego.

**5.** Rozwinąć $(2x-y)^7$.

**6.** Znaleźć współczynnik przy $x^5y^{13}$ w rozwinięciu $(3x-2y)^{18}$. Jaki współczynnik znajduje się przy $x^8y^9$ ?

**7.** Korzystając ze wzoru dwumianowego pokazać, że $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k$.

**8.** Pokazać, że $2^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} 3^k$. Obliczyć sumę $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 10^k$.

**9.** Używając argumentacji kombinatorycznej udowodnić tożsamość (w podanej formie)

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}.$$

`Wskazówka:` Niech $S$ będzie zbiorem z 3 wyróżnionymi elementami $a$, $b$ i $c$. Zliczyć pewne $k$-kombinacje $S$.

**10.** Pokazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n$ zachodzi wzór

$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - 4\binom{n}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} n \binom{n}{n} = 0.$$

**11.** Za pomocą całkowania wzoru dwumianowego wyprowadzić wzór

$$1 + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

**12.** Obliczyć sumę $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ korzystając ze wzoru

$$m^2 = 2\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$$

oraz z pewnego wzoru wyprowadzonego na wykładzie.

**13.** Znaleźć liczby całkowite $a$, $b$ i $c$ spełniające
$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1}.$$
Następnie znaleźć wzór na $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

**14.** Udowodnić, że dla wszystkich liczb rzeczywistych $r$ i wszystkich liczb całkowitych $k$ i $m$ zachodzą wzory
$$\binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}, \qquad \binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}.$$

**15.** Używając argumentacji kombinatorycznej pokazać, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych $m_1$, $m_2$ i $n$ mamy
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k} = \binom{m_1+m_2}{n}.$$

**16.** Znaleźć wzór na
$$\sum_{\substack{r,\, s,\, t \geqslant 0 \\ r+s+t=n}} \binom{m_1}{r}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t},$$
gdzie sumowanie odbywa się względem wszystkich nieujemnych liczb całkowitych $r$, $s$ i $t$ spełniającyh $r+s+t=n$.

**17.** Rozwiązać zadanie 15 ze wzoru dwumianowego używając wzoru
$$(1+x)^{m_1}(1+x)^{m_2} = (1+x)^{m_1+m_2}.$$

**18.** Korzystając ze wzoru wielomianowego pokazać, że dla całkowitych dodatnich liczb $n$ i $k$ zachodzi wzór
$$k^n = \sum \binom{n}{n_1\ n_2 \cdots n_k},$$
gdzie sumowanie odbywa się względem wszystkich nieujemnych liczb całkowitych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ spełniających $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

**19.** Znaleźć rozwinięcie $(x_1 + x_2 + x_3)^4$.

**20.** Wyznaczyć współczynnik przy $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ w rozwinięciu
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}.$$

**21.** Wyznaczyć współczynnik przy $x_1^3 x_2^3 x_3 x_4^4$ w rozwinięciu
$$(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4^2)^9.$$

**22.** Rozwinąć $(x_1 + x_2 + x_3)^n$ używając $(x_1 + x_2 + x_3)^n = ((x_1 + x_2) + x_3)^n$ i korzystając ze wzoru dwumianowego.

**23.** Udowodnić przez indukcję, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k, \qquad |z| < 1.$$

**24.** Wyprowadzić wzór

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1},$$

używając argumentów kombinatorycznych. `Wskazówka:` Obliczyć liczbę podzbiorów zbioru $n$-elementowego z jednym wyróżnionym elementem tego podzbioru.