

6. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), niepodzielnych przez 4, 5 ani 6 ?
2. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), niepodzielnych przez 4, 6, 7 ani 10 ?
3. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1 i 10 000 (włącznie), które nie są kwadratami ani sześciątami liczb całkowitych ?
4. Znaleźć liczbę 12-kombinacji multizbioru $S = \{4 \cdot a, 3 \cdot b, 4 \cdot c, 5 \cdot d\}$.
5. Znaleźć liczbę 10-kombinacji multizbioru $S = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$.
6. Piekarnia ma w sprzedaży słodkie bułki: 3 z czekoladą, 7 z dżemem i 3 bez nadzienia. W pudełku mieści się 12 bułek. Ile różnych pudełek można kupić w piekarni ?
7. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ w nieujemnych liczbach całkowitych nie przekraczających 8.
8. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 = 14$ w dodatnich liczbach całkowitych nie przekraczających 8.
9. Znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ w liczbach całkowitych takich, że $1 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 7$, $4 \leq x_3 \leq 8$ i $2 \leq x_4 \leq 6$.
10. S jest multizbiorem posiadającym k różnych elementów z liczbami powtórzeń n_1, n_2, \dots, n_k . Załóżmy, że istnieje przynajmniej jedna r -kombinacja S . Pokazać, że stosując zasadę włączania-wyłączania w celu obliczenia liczby r -kombinacji multizbioru S , (za pomocą metody pokazanej na wykładzie) otrzymamy $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \emptyset$.
11. Wyznaczyć liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 8\}$, w których żadna liczba parzysta nie znajduje się na swojej naturalnej pozycji.
12. Wyznaczyć liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 8\}$, w których dokładnie cztery liczby znajdują się na swoich naturalnych pozycjach.
13. Znaleźć ogólny wzór na liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, w których dokładnie k liczb znajduje się na swoich naturalnych pozycjach.
14. Na przyjęciu 7 panów zostawiło w szatni kapelusze. Na ile sposobów szatniarz może zwrócić kapelusze przy założeniu, że
 - (a) żaden z panów nie otrzyma swojego kapelusza ?
 - (b) przynajmniej jeden pan otrzyma swój własny kapelusz ?

(c) przynajmniej dwu panów otrzyma swoje własne kapelusze ?

15. Za pomocą argumentów kombinatorycznych wyprowadzić tożsamość

$$n! = \binom{n}{0}D_0 + \binom{n}{1}D_1 + \binom{n}{2}D_2 + \dots + \binom{n}{n-1}D_{n-1} + \binom{n}{n}D_n.$$

(Przyjmujemy $D_0 = 1$.)

16. Wyznaczyć ilość wszystkich permutacji multizbioru $S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 2 \cdot c\}$, w których wszystkie litery tego samego rodzaju nie mogą pojawić się kolejno. (Tzn. permutacja *abbbbcaca* jest niemożliwa, ale *abbbacacb* jest możliwa.)

17. Korzystając ze wzoru na liczby D_n pokazać, że $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$ dla $n \geq 3$.

18. Pokazać, że D_n jest liczbą parzystą dokładnie wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

19. Niech A będzie zbiorem n -elementowym $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Wyznaczyć liczbę k -kombinacji zbioru A używając zasady włączania-wyłączania, wyprowadzając w ten sposób pewien wzór na $\binom{n}{k}$.

20. Wyznaczyć liczbę permutacji $i_1i_2i_3i_4i_5i_6$ zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ takich, że $i_1 \neq 1, 5$; $i_3 \neq 2, 3, 5$; $i_4 \neq 4$ oraz $i_6 \neq 5, 6$.

21. Ośmiu dziewczynek kręci się na karuzeli. Na ile sposobów mogą one zamienić się miejscami (zamiana następuje, gdy karuzela chwilowo zatrzyma się) tak, że każda dziewczynka ma inną koleżankę przed sobą ?

22. Ośmiu chłopców kręci się na karuzeli tak, że są zwrócenii twarzą do środka karuzeli. Na ile sposobów mogą oni zamienić się miejscami tak, że każdy chłopczyk ma innego kolegę na przeciwko ?

*23. Dla liczby naturalnej n symbol Q_n oznacza liczbę permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które nie zawierają w sobie $12, 23, \dots, (n-1)n$. Tzn. dla $n = 3$ dopuszczalnymi permutacjami są $213, 321, 132$, ale np. 231 jest niedopuszczalna. Pokazać, że dla $n \geq 1$ zachodzi wzór

$$Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-2}{1}(n-1)! - \binom{n-3}{1}(n-3)! + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} 1!$$