7. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Niech $f(0)$, $f(1)$, $f(2), \ldots$ będą liczbami Fibonacci'ego. Obliczyć podane niżej sumy dla małych wartości n, odgadnąć wzór ogólny i udowodnić go przez indukcję.

(a) $f(1) + f(3) + \ldots + f(2n-1)$.
(b) $f(0) + f(2) + \ldots + f(2n)$.
(c) $f(0) - f(1) + f(2) - \ldots + (-1)^n f(n)$.
(d) $f(0)^2 + f(1)^2 + \ldots + f(n)^2$.
(e) $f(n)f(n+2) + (-1)^n$.

2. Rozważmy szachownicę $1 \times n$. Każde pole szachownicy jest pomalowane na czerwono lub niebiesko tak, że nie ma dwu sąsiednich czerwonych kwadratów. Niech $g(n)$ oznacza liczbę sposobów pokolorowania szachownicy. Znaleźć wzór rekurencyjny jaki spełniają liczby $g(n)$. Następnie znaleźć wzór na $g(n)$.

3. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ niech $h(n)$ oznacza ilość różnych sposobów pokolorowania pól szachownicy $1 \times n$ barwami białą, niebieską i czerwoną tak, że nie ma dwu sąsiednich czerwonych kwadratów. Znaleźć wzór rekurencyjny jaki spełniają liczby $h(n)$. Następnie znaleźć wzór na $h(n)$.

4. Załóżmy, że Fibonacci umieścił dwie pary królików w odosobnieniu na początku roku. Znaleźć liczbę par królików po roku. Ogólniej, znaleźć liczbę par królików po n miesiącach.

5. Rozwiązać równanie rekurencyjne $H(n) = 4H(n-2)$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$, przy warunkach początkowych $H(0) = 0$ i $H(1) = 1$.

6. Rozwiązać równanie rekurencyjne $H(n) = (n+2)H(n-1)$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, przy warunkach początkowych $H(0) = 2$.

7. Rozwiązać równanie rekurencyjne $H(n) = H(n-1) + 9H(n-2) - 9H(n-3)$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$, przy warunkach początkowych $H(0) = 0$, $H(1) = 1$ i $H(2) = 2$.

8. Rozwiązać równanie rekurencyjne $H(n) = 8H(n-1) - 16H(n-2)$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$, przy warunkach początkowych $H(0) = -1$ i $H(1) = 0$.

9. Rozwiązać równanie rekurencyjne $H(n) = 3H(n-2) - 2H(n-3)$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$, przy warunkach początkowych $H(0) = 1$, $H(1) = 0$ i $H(2) = 0$.

10. Rozwiązać równanie rekurencyjne $H(n) = 5H(n-1) - 6H(n-2) - 4H(n-3) + 8H(n-4)$ dla $n = 4, 5, 6, \ldots$, przy warunkach początkowych $H(0) = 0$, $H(1) = 1$, $H(2) = 1$ i $H(3) = 2$.

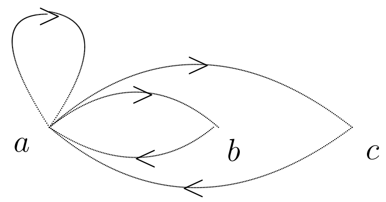
11. Rozwiązać podane równania rekurencyjne przez znalezienie kilku pierwszych wyrazów, odgadnięcie wzoru i udowodnienie go przez indukcję.

(a) $H(n) = H(n-1) - n + 3$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$; $H(0) = 2$.
(b) $H(n) = -H(n-1) + 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$; $H(0) = 0$.
(c) $H(n) = -H(n-1) + 2$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$; $H(0) = 1$.
(d) $H(n) = 2H(n-1) + 1$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$; $H(0) = 1$.

12. Znaleźć wzór rekurencyjny na liczbę sposobów wypłacenia n złotych przy użyciu

(a) monet jedno i dwuzłotowych;
(b) monet jedno, dwu i pięciozłotowych.

13. Dla grafu skierowanego podanego niżej wyznaczyć liczbę różnych skierowanych dróg składających się z n krawędzi, zaczynających się w a i kończących się w c.



14. Znaleźć wzór rekurencyjny na liczbę sposobów rozdzielenia n obiektów pomiędzy 4 różne osoby.

15. Znaleźć wzór rekurencyjny na ilość ciągów długości n złożonych z 0,1 i 2 takich, że bezpośrednio na lewo od 2 nie może znajdować się 1.

16. Dziecko codziennie chodzi do ciastkarni. Kupuje albo jedno z dwu rodzajów ciastek po złotówce albo jedno z trzech rodzajów ciastek po 2 złote. Znaleźć i rozwiązać relację rekurencyjną na liczbę sposobów wydania n złotych w ciastkarni (kolejność jest istotna).

17. Dla różnych liczb $q_1, q_2, \ldots, q_n$ pokazać przez indukcję, że

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ q_1^2 & q_2^2 & \cdots & q_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1^{n-1} & q_2^{n-1} & \cdots & q_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (q_i - q_j).$$

`Wskazówka:` Zastąpić q_n przez zmienną x i pokazać, że wyznacznik jest wielomianem stopnia $n-1$ postaci $A(x-q_1)(x-q_2)\ldots(x-q_{n-1})$.

$*$**18.** Pokazać, że ciąg $\sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \ldots$ jest zbieżny do liczby 3. `Wskazówka:` Znaleźć wzór rekurencyjny dla wyrazów ciągu.