8. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

1. Rozwiązać niejednorodne równania rekurencyjne.

(a) $h(n) = 4h(n-1) + 3 \cdot 2^n$, $(n \geqslant 1)$, $\quad h(0) = 1$.

(b) $h(n) = 3h(n-1) - 2$, $(n \geqslant 1)$, $\quad h(0) = 1$.

(c) $h(n) = 2h(n-1) + n$ $(n \geqslant 1)$, $\quad h(0) = 1$.

(d) $h(n) = 6h(n-1) - 9h(n-2) + 2n$, $(n \geqslant 2)$, $\quad h(0) = 1$, $h(1) = 0$.

$*$**2.** $2n$ różnych punktów leży na okręgu. Niech $h(n)$ oznacza liczbę sposobów połaczenia tych punktów w pary tak, że otrzymane odcinki nie przecinają się. Znaleźć wzór rekurencyjny dla liczb $h(n)$.

$*$**3.** Chcemy pociąć pasek wymiaru $1 \times n$ na kwadraty jednostkowe. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeśli w każdym kroku:

(a) tniemy jeden z kawałków zawierający więcej niż jeden kwadrat na dwa ?

(b) tniemy wszystkie kawałki zawierające więcej niż jeden kwadrat na dwa ?

4. Pokazać, że

$$p_i(0) + p_i(1) + p_i(2) + \ldots + p_i(m) = \binom{m+1}{i+1}.$$

`Wskazówka:` Suma jest równa

$$\binom{i}{i} + \binom{i+1}{i} + \ldots + \binom{m}{i}$$
$$\binom{i}{0} + \binom{i+1}{1} + \ldots + \binom{m}{m-i}.$$

Skorzystać teraz z pewnego wzoru udowodnionego na wykładzie.

5. Pokazać, że jeśli wielomian $p(x)$ spełnia $p(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \ldots + c_n p_n(x)$, to

$$\sum_{k=0}^{m} p(k) = c_0 \binom{m+1}{1} + c_1 \binom{m+1}{2} + \ldots + c_n \binom{m+1}{n+1}.$$

6. Znaleźć lewy brzeg tablicy różnicowej dla wielomianu $p(x) = x^4$. Następnie obliczyć $\sum_{k=0}^{m} k^4$ korzystając z poprzedniego zadania. Przekształcić wynik do postaci iloczynu.

7. Niech $p(x) = 2x^2 + x + 3$. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^{m} p(k)$.

8. Niech $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^{m} p(k)$.

9. Wielomian $p(x)$ ma stopień 3. Początkowy wiersz tablicy różnicowej dla $p(x)$ ma postać $1, -1, 3, 19, \ldots$. Wyznaczyć $p(x)$. Obliczyć $\sum_{k=0}^{m} p(k)$. `Wskazówka:` Znaleźć lewy brzeg tablicy różnicowej dla wielomianu $p(x)$.

10. Znaleźć wzór na $\sum_{k=0}^{m} k^5$.

11. Pokazać, że jeśli w jakiejś tablicy różnicowej $(n+1)$-sze różnice są równe 0, to jest to tablica różnicowa pewnego wielomianu stopnia co najwyżej n.

12. Pokazać, że jeśli $f(x)$ jest funkcją na prostej rzeczywistej, nieskończenie wiele razy różniczkowalną, to $\Delta^k f(x) = f^{(k)}(\xi)$ dla pewnej liczby ξ leżącej pomiędzy x i $x + k$. `Wskazówka:` Przeprowadzić dowód przez indukcję względem k, przy użyciu twierdzenia Lagrange'a.

13. Niech $p(x)$ będzie funkcją określoną na prostej rzeczywistej. Pokazać przez indukcję, że

$$\Delta^k p(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{k-j} p(x + (k-j)).$$

14. Niech $p(x)$ będzie wielomianem stopnia n. Pokazać, że stałe $c_0, c_1, \ldots, c_n$ takie, że

$$p(x) = c_0 \binom{x}{0} + c_1 \binom{x}{1} + \ldots + c_n \binom{x}{n}$$

są jedyne.

∗15. Dana jest tablica różnicowa dla pewnej funkcji f. Pokazać, że tablica ta jest wyznaczona przez ciąg wyrazów tej tablicy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ taki, że $a_0 = f(0)$ oraz dla każdego i liczba a_{i+1} jest położona w tym samym wierszu co a_i bezpośrednio na prawo, albo liczba ta leży w następnym wierszu bezpośrednio na prawo od a_i.

16. Dla wielomianu $p(x) = x^n$ mamy

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} c(n,k) \binom{x}{k},$$

gdzie współczynniki $c(n,0), c(n,1), \ldots c(n,n)$ są początkowymi wyrazami lewego brzegu tablicy różnicowej dla $p(x) = x^n$. Liczby postaci $S(n,k) = \dfrac{c(n,k)}{k!}$ są nazywane liczbami Stirlinga drugiego rodzaju. Pokazać, że dla $n > 0$ mamy $S(n,0) = 0$ i $S(n,n) = 1$.

17. Udowodnić, że liczby Stirlinga spełniają wzór rekurencyjny

$$S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1) \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Pokazać, że mając ten wzór i warunki $S(n,0) = 0$, $S(n,n) = 1$ można obliczyć każdą liczbę $S(n,k)$.

18. Niech $P(n,t)$ oznacza ilość podziałów zbioru n-elementowego na k niepustych podzbiorów (kolejność podzbiorów jest nieistotna). Pokazać, że $P(n,k)$ spełnia ten sam wzór rekurencyjny co liczby Stirlinga $S(n,k)$ oraz ma te same wartości początkowe. Wywnioskować, że $P(n,k) = S(n,k)$.