9. Zadania do wykładu
Wstęp do matematyki dyskretnej

**1.** Znaleźć funkcję tworzącą ciągu liczb $1, q, q^2, q^3, \ldots$ .

**2.** Znaleźć funkcje tworzące dla podanych ciągów.

(a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ .

(b) $\binom{\alpha}{0}, -\binom{\alpha}{1}, \binom{\alpha}{2}, \ldots, (-1)^n\binom{\alpha}{n}, \ldots$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

(c) $0, 0, 0, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ .

(d) $5, 6, 7, 8, \ldots, n+5, \ldots$ .

(e) $1/0!, 1/1!, 1/2!, \ldots, 1/n!, \ldots$ .

(f) $1/0!, -1/1!, 1/2!, \ldots, (-1)^n/n!, \ldots$ .

(g) $1, 3, 4, 9, 8, 27, 16, 81, \ldots$ .

(h) $1, 2, 4, 1, 3, 8, 1, 4, 16, 1, 5, 32, \ldots$ .

$*$(i) $1, 2\cos\theta, 2\cos 2\theta, 2\cos 3\theta, \ldots, 2\cos n\theta, \ldots$ .

**3.** Niech $S$ będzie multizbiorem $\{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \infty \cdot e_3, \infty \cdot e_4\}$. Wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, gdzie $a_n$ jest liczbą $n$-kombinacji $S$ przy podanych warunkach.

(a) Każdy element występuje nieparzystą ilość razy.

(b) Każdy element występuje liczbę razy podzielną przez 3.

(c) Element $e_1$ nie pojawia się, a $e_2$ pojawia się co najwyżej raz.

(d) Element $e_1$ pojawia się 1, 3 lub 11 razy, natomiast element $e_2$ pojawia się 2, 4 lub 5 razy.

(e) Każdy element pojawia się przynajmniej 10 razy.

**4.** Rozwiązać relacje rekurencyjne za pomocą funkcji tworzących.

(a) $a_n = 4a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$ oraz $a_0 = 0,\ a_1 = 1$.

(b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$ oraz $a_0 = 1,\ a_1 = 3$.

(c) $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} - 9a_{n-3}$ dla $n \geqslant 3$ oraz $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$.

(d) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$ oraz $a_0 = -1,\ a_1 = 0$.

(e) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ dla $n \geqslant 3$ oraz $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0$.

(f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} - 4a_{n-3} + 8a_{n-4}$ dla $n \geqslant 4$ oraz $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2$.

(g) $a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2} + 8a_{n-3} + 16a_{n-4}$ dla $n \geqslant 4$ oraz $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2$.

**5.** Znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu kolejnych sześcianów liczb naturalnych $0, 1, 8, \ldots, n^3, \ldots$ .

**6.** Wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu liczb $a_n = \binom{n}{2},\ n \geqslant 0$.

**7.** Wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu liczb $a_n = \binom{n}{3},\ n \geqslant 0$.

**8.** Wyznaczyć funkcję tworzącą ciągu liczb $a_n = \binom{n}{k},\ n \geqslant 0$, dla liczby naturalnej $k$.

$*$**9.** Wyznaczyć funkcję generującą ciągu liczb $a_n = n^k,\ n \geqslant 0$, dla liczby naturalnej $k$.

**10.** Podziałem liczby naturalnej $n$ nazywamy przedstawienie tej liczby w postaci sumy liczb naturalnych. Kolejność składników jest nieistotna. Np. $6 = 3 + 3,\ 6 = 6,\ 6 = 1 + 1 + 2 + 2$ są podziałami liczby 6. Niech $p(n)$ oznacza ilość różnych podziałów liczby $n$. Przyjmujemy $p(0) = 1$.

(a) Pokazać, że $p(n)$ jest równa liczbie rozwiązań równania $n = 1\,x_1 + 2\,x_2 + \ldots + nx_n$ w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(b) Pokazać, że funkcja tworząca liczb $p(0), p(1), p(2), \ldots$ ma postać nieskończonego iloczynu

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}.$$

(c) Niech $t_1, t_2, \ldots, t_m$ będą różnymi liczbami naturalnymi. Niech $q(n)$ oznacza ilość podziałów liczby $n$ na składniki pochodzące z $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Niech $q(0) = 1$. Pokazać, że funkcja tworząca ciągu $q(0), q(1), q(2), \ldots$ ma postać

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - x^{t_k}}.$$

**11.** Chcemy wymnożyć $n$ liczb $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ w podanej kolejności. Obliczenie wymaga wykonania $n - 1$ mnożeń dwu czynników. Pokazać bezpośrednio, że ilość $a_n$ tych sposobów jest równa liczbie podziałów $(n + 1)$-kąta wypukłego na $n$ trójkątów.

**12.** Na ile sposobów przy 25 rzutach monetą można otrzymać w wyniku dokładnie 5 orłów przy czym reszki nie pojawiają się kolejno więcej niż 7 razy ?

**13.** Na ile sposobów można rozmienić 20 zł używając monet 1, 2 i 5 zł oraz banknotu 10 zł.

**14.** Za pomocą dzielenia wielomianów wyznaczyć pierwszych 6 wyrazów ciągu, którego funkcją tworzącą jest

(a) $\dfrac{1+2x}{1+3x+x^2}$.

(b) $\dfrac{1+3x^2}{1+2x+x^2+5x^4}$.

(c) $\dfrac{2+3x+x^2}{3+x+2x^4}$.

**15.** Wyznaczyć wykładniczą funkcję tworzącą ciągu $1!, 2!, 3!, \ldots, n!, \ldots$.

**16.** Dla liczby rzeczywistej $\alpha$ określamy ciąg $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ wzorem $a_0 = 1$ oraz $a_n = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$. Znaleźć wykładniczą funkcję tworzącą tego ciągu.

**17.** Niech $S$ będzie multizbiorem $\{\infty \cdot e_1, \infty \cdot e_2, \ldots, \infty \cdot e_k\}$. Wyznaczyć wykładniczą funkcję tworzącą ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takiego, że $a_0 = 1$ oraz

(a) $a_n$ jest liczbą $n$-permutacji multizbioru $S$, w których każdy element pojawia się nieparzystą liczbę razy.

(b) $a_n$ jest liczbą $n$-permutacji multizbioru $S$, w których każdy element pojawia się przynajmniej 4 razy.

(c) $a_n$ jest liczbą $n$-permutacji multizbioru $S$, w których $e_1$ pojawia się przynajmniej raz, $e_2$ pojawia się przynajmniej dwa razy, $\ldots$, $e_k$ pojawia się przynajmniej $k$ razy.

(d) $a_n$ jest liczbą $n$-permutacji multizbioru $S$, w których $e_1$ pojawia się co najwyżej raz, $e_2$ pojawia się co najwyżej dwa razy, $\ldots$, $e_k$ pojawia się co najwyżej $k$ razy.

**18.** Wyznaczyć liczbę sposobów pokolorowania szachownicy $1 \times n$ używając kolorów czerwonego, niebieskiego, zielonego oraz pomarańczowego przy założeniu, że

(a) parzysta liczba pól ma być koloru czerwonego i parzysta liczba pól ma być koloru zielonego;

(b) nieparzysta liczba pól ma być koloru czerwonego i parzysta liczba pól ma być koloru pomarańczowego.

`Wskazówka:` Niech $a_n$ oznacza liczbę tych sposobów. Wyznaczyć wykładniczą funkcję tworzącą i następnie znaleźć współczynnik przy $x^n/n!$.

**19.** Wyznaczyć ilość liczb o $n$ cyfrach, nie mniejszych niż 4, w których 4 i 6 występują parzystą liczbę razy, 5 i 7 pojawiają się przynajmniej raz, i nie ma żadnych ograniczeń dotyczących 8 i 9.

**20.** Znaleźć liczbę sposobów rozdzielenia 10 różnych zabawek pomiędzy czworo różnych dzieci jeśli

(a) Pierwsze dziecko otrzymuje przynajmniej jedną zabawkę.

(b) Drugie dziecko otrzymuje przynajmniej dwie zabawki.

(c) Pierwsze dziecko otrzymuje przynajmniej jedną zabawkę a drugie dziecko otrzymuje przynajmniej dwie zabawki.

`Wskazówka:` Założyć, że liczba zabawek wynosi $n$. Niech $a_n$ oznacza liczbę sposobów rozdzielenia zabawek. Znaleźć wykładniczą funkcję tworzącą liczb $a_n$. Obliczyć współczynnik przy $x^{10}/10!$.

**21.** Znaleźć ilość liczb $n$-cyfrowych, o cyfrach równych $1, 2, 3$ lub 4, w których cyfry 1 i 2 pojawiają się w sumie parzystą ilość razy.