Warsztaty z kombinatoryki

Lubachów, 30 listopada-2 grudnia 2018

1 Współczynniki dwumianowe Newtona

Liczby

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1}$$

mają wiele ciekawych własności. Wiemy, że wielkość $\binom{n}{k}$ oznacza liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego.

- Ile wynosi $\binom{n}{0}$?
- Dlaczego $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$?
- Która z liczb $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ jest największa ?

Twierdzenie 1 (Wzór Pascala)**.** *Dla* $1 \leq k \leq n-1$ *mamy*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Dowód. Niech S będzie zbiorem o n elementach. Wyróżniamy jeden element zbioru S. Np. S może składać się z $n-1$ białych kul i jednej czarnej. Aby wybrać k kul możemy:

(a) Wybrać k białych kul na $\binom{n-1}{k}$ sposobów,

(b) Wziąć czarną kulę i dobrać $k-1$ białych kul na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów.

Zatem mamy razem
$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
możliwości. □

Liczby $\binom{n}{k}$ możemy zapisać w trójkątnej tabeli.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Twierdzenie 2.
$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$
Dla $n \geq k$ mamy
$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dowód. Ze wzoru Pascala
$$\begin{aligned}\binom{n+k+1}{k} &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k-1}{k-2} \\ &= \ldots = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \ldots + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{0} \\ &= \binom{n+k}{k} + \binom{n+k-1}{k-1} + \ldots + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}.\end{aligned}$$

Dalej

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n}{k}$$
$$=\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\ldots+\binom{n}{n-k}=\binom{n+1}{n-k}=\binom{n+1}{k+1}.$$

$\square$

Twierdzenie 3 (dwumianowe Newtona)**.**

$$(x+y)^n = x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+y^n, \quad (2)$$
$$(x+1)^n = x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}x+1. \quad (3)$$

1.1 Tożsamości

(a)

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \qquad n\geq k\geq 1. \quad (4)$$

Można wzór wyprowadzić na podstawie (1). Można również uzasadnić wzór podając interpretację kombinatoryczną równości

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

Jak to zrobić ? (**zadanie**)

(b)

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Wystarczy we wzorze (2) podstawić $x=y=1$. Można też podać interpretację kombinatoryczną. (**zadanie**)

Podstawmy $x=1$ i $y=2$ do wzoru (2). Wtedy

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}2+\binom{n}{2}2^2+\ldots+\binom{n}{n}2^n=3^n.$$

Podać kombinatoryczne wyjaśnienie równości. (**zadanie**)

(c)
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

We wzorze (2) podstawić $x = 1$, $y = -1$. Przenosząc wyrazy ze znakiem minus na prawą stronę otrzymamy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots, \tag{5}$$

tzn. liczba podzbiorów z parzystą liczbą elementów jest równa liczbie podzbiorów z nieparzystą liczbą elementów. Nietrudno to wyjaśnić kombinatorycznie, jeśli liczba n jest nieparzysta. Rzeczywiście, niech zbiór S składa się z n elementów. Każdemu podzbiorowi A z parzystą liczbą elementów odpowiada dopełnienie $S \setminus A$, z nieparzystą liczbą elementów.

Jak wyjaśnić kombinatorycznie wzór (5), gdy liczba n jest parzysta ? (**zadanie**)

(d)
$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}. \tag{6}$$

Przy wyprowadzeniu wzoru możemy skorzystać z (4). Wtedy lewa strona jest równa

$$\begin{aligned}&\frac{n}{1}\binom{n-1}{0} + 2\,\frac{n}{2}\binom{n-1}{1} + 3\,\frac{n}{3}\binom{n-1}{2} + \ldots + n\,\frac{n}{n}\binom{n-1}{n-1}\\ &\quad = n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}\right] = n\,2^{n-1}.\end{aligned}$$

Znaleźć kombinatoryczne uzasadnienie wzoru (6). (**zadanie**)

(e) Wyprowadzić wzór (**zadanie**)

$$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + n^2\binom{n}{n} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}. \tag{7}$$

(f)
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \tag{8}$$

Wyjaśnienie 1: zbiór S złożony z $2n$ elementów dzielimy na dwa podzbiory A i B złożone z n elementów. Każdy n-elementowy podzbiór zbioru S zawiera pewną liczbę k elementów ze zbioru A i $n-k$ elementów ze zbioru B. Liczba k-elementowych podzbiorów A wynosi $\binom{n}{k}$, a liczba $(n-k)$-elementowych podzbiorów zbioru B wynosi $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. Przy ustalonej wartości k mamy zatem $\binom{n}{k}^2$ możliwości do wyboru. Poprzez dodanie wszystkich możliwości otrzymamy wzór (8).

Wyjaśnienie 2:

$$(x+1)^n(x+1)^n = (1+x)^{2n}.$$

Współczynnik przy x^n po prawej stronie wzoru wynosi $\binom{2n}{n}$. Obliczymy ten współczynnik po lewej stronie.

$$\begin{aligned}(x+1)^n(x+1)^n = &\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n}\right] \\ &\times \left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n}\right]\end{aligned}$$

Współczynnik przy x^n wynosi zatem

$$\begin{aligned}&\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} \\ &\qquad = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2.\end{aligned}$$

Wiele ciekawych wzorów można otrzymać poprzez przeliczenie obiektów na dwa różne sposoby.

2 Zasada włączania i wyłączania

Zasada służy do zliczania obiektów w sposób pośredni. Jeśli A jest podzbiorem zbioru S, to liczba obiektów w zbiorze A jest równa liczba obiektów w zbiorze S

minus liczba obiektów spoza podzbioru A. Jeśli $|A|$ oznacza liczbę obiektów w A oraz $\overline{A}$ oznacza dopełnienie zbioru A w S, tzn. $\overline{A} = S \setminus A$, to

$$|A| = |S| - |\overline{A}|.$$

Niech S będzie zbiorem obiektów, a P_1 i P_2 dwiema własnościami, jakie obiekty w S mogą spełniać lub nie spełniać. Oznaczmy symbolami A_1 i A_2 te obiekty, które mają własność P_1, P_2, odpowiednio. Chcemy znaleźć liczbę obiektów, które nie spełniają własności P_1 ani P_2. Tzn. chodzi o obliczenie $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2|$.

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|. \tag{9}$$

Wzór (9) uzasadnimy następująco: pokażemy, że element x, który nie spełnia P_1 i P_2 ma wkład 1 po prawej stronie równości, a element, który spełnia P_1 lub P_2 ma wkład 0. Jeśli x nie spełnia ani P_1 ani P_2, to taki element leży w S, ale nie leży w żadnym ze zbiorów A_1, A_2, $A_1 \cap A_2$. Stąd jego wkład wynosi 1. Jeśli x spełnia tylko jedną z własności, np. P_1, to jego wkład w prawą stronę wzoru wynosi

$$1 - 1 - 0 + 0 = 0.$$

Jeśli x spełnia tylko P_2, to wkład wynosi

$$1 - 0 - 1 + 0 = 0.$$

Jeśli x spełnia P_1 i P_2, to wkład wynosi

$$1 - 1 - 1 + 1 = 0.$$

Ogólnie, załóżmy, że mamy m własności $P_1, P_2, \ldots, P_m$, które elementy zbioru S mogą spełniać lub nie spełniać. Oznaczmy symbolem A_i zbiór elementów w S, które mają własność P_i.

Twierdzenie 4 (zasada włączania i wyłączania)**.** *Liczba elementów w S, które nie spełniają żadnej własności P_1, P_2, ..., P_m wynosi*

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_m| &= |S| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap_2 \cap \ldots \cap A_m|. \end{aligned} \tag{10}$$

Dla $m = 3$ i $m = 4$ wzory mają postać

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\
+ (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4| = |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) \\
+ (|A_1 \cap A_2| + +(|A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\
- (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}
$$

Ile składników powinno być po prawej stronie wzoru (10) ? Tyle ile wszystkich podzbiorów zbioru m-elementowego, czyli 2^m. Ilość składników po prawej stronie wynosi

$$1 + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m.$$

Dla $m = 4$ powinno być 16 składników.

Dowód. Przeprowadzimy podobne rozumowanie jak w przypadku $m = 2$. Rozważmy obiekt, który nie spełnia żadnej z własności $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Jego wkład w prawą stronę wzoru (10) wynosi

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m 0 = 1.$$

Rozważmy teraz obiekt x, który spełnia dokładnie $n \geq 1$ własności spośród $P_1, P_2, \ldots, P_m$, gdzie $n \leq m$. Wkład w lewą stronę wzoru wynosi 0. Jego wkład w $|S|$ wynosi 1, w $\sum_i |A_i|$ wynosi n. Z kolei wkład w $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$ wynosi $\binom{n}{2}$, bo na tyle sposobów możemy wybrać parę własności jakie x spełnia. Wkład y w $\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ wynosi $\binom{n}{3}$, itd. Zatem wkład x po prawej stronie wzoru (10) wynosi

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

$\square$

Wniosek 1. *Liczba obiektów w S, które spełniają przynajmniej jedną z własności $P_1, P_2, \ldots, P_m$ wynosi*

$$|A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_m| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ + \ldots + (-1)^{m+1}|A_1 \cap_2 \cap \ldots \cap A_m|.$$

Dowód.

$$|A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_m| = |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_m}| = |S| - |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_m|.$$

Wystarczy teraz zastosować Twierdzenie 3. □

Przykład. Ile jest liczb naturalnych od 1 do 1000 niepodzielnych przez 5, 6 i 8 ? Niech P_1, P_2 i P_3 oznaczają własności podzielności przez 5, 6 i 8. Wtedy

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, \qquad |A_2| = \lfloor \tfrac{1000}{6} \rfloor = 166, \qquad |A_3| = \lfloor \tfrac{1000}{8} \rfloor = 125,$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33, \quad |A_1 \cap A_3| = \lfloor \tfrac{1000}{40} \rfloor = 25, \quad |A_2 \cap A_3| = \lfloor \tfrac{1000}{24} \rfloor = 41,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8.$$

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600.$$

2.1 Kombinacje multizbiorów

Multizbiór jest podobny do zbioru, ale jego elementy nie muszą być różne. Np. multizbiór

$$M = \{a, a, a, b, c, c, d, d, d, d\}$$

ma 10 elementów: $3 \cdot a$, $1 \cdot b$, $2 \cdot c$ i $4 \cdot d$. Będziemy stosować zapis

$$M = \{3 \cdot a, 1 \cdot b, 2 \cdot c, 4 \cdot d\}.$$

Liczby 3, 1, 2 i 4 są liczbami powtórzeń elementów multizbioru M. Można elementy a, b i c traktować jak różne rodzaje owoców: jabłka, gruszki i brzoskwinie.

Zbiór jest multizbiorem, w którym liczby powtórzeń są równe 1. Dopuszczamy multizbiory z nieskończoną liczbą powtórzeń, np.

$$M = \{\infty \cdot a,\ 2 \cdot b,\ \infty \cdot c,\ 4 \cdot d\}.$$

Wybór r elementów multizbioru (nieuporządkowany) nazywamy r-kombinacją. Łatwo obliczyć liczbę r-kombinacji multizbioru

$$M = \{n_1 \cdot a_1,\ n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}, \quad r \leq n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

jeśli

(a) $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$, tzn M jest zbiorem,

(b) $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = r$ (lub ∞).

W przypadku (a) otrzymujemy $\binom{k}{r}$. W przypadku (b) zagadnienie sprowadza się do liczby rozwiązań równania

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = r, \tag{11}$$

gdzie $m_1,\ m_2, \ldots,\ m_k$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Aby znaleźć liczbę rozwiązań, rozważmy r białych kul ułożonych wzdłuż poziomej linii. Dokładając $k-1$ białych kul otrzymamy w sumie $r+k-1$ elementów. Z otrzymanego zbioru wybierzmy $k-1$ kul i przemalujmy je na czarno. W ten sposób pozostałe r białych kul zostało podzielonych na k grup. Niektóre z tych grup mogą być puste, jeśli dwie czarne kule sąsiadują ze sobą. Niech $n_1, n_2, \ldots, n_k$ oznacza liczby białych kul w grupach. Tzn. n_1 oznacza liczbę białych kul na lewo od pierwszej czarnej, n_2 liczbę białych kul pomiędzy pierwszą i drugą czarną kulą, itd., wreszcie n_k oznacza liczbę białych kul na prawo od ostatniej $(k-1)$-ej czarnej kuli. To oznacza, ze liczba rozwiązań równania (11) wynosi

$$\binom{r+k-1}{k-1} = \binom{r+k-1}{r}.$$

Przypadek, gdy któraś z liczb powtórzeń $n_1, n_2, \ldots, n_k$ jest mniejsza niż r jest trudniejszy. Np. gdy $n_1 < r$ r-kombinacja nie może składać się tylko z elementów typu a_1.

Przykład. Obliczyć liczbę 10-kombinacji multizbioru

$$B = \{3 \cdot a,\ 4 \cdot b,\ 5 \cdot c\}.$$

Zastosujemy zasadę włączania i wyłączania rodziny S wszystkich 10-kombinacji multizbioru

$$M = \{\infty \cdot a,\ \infty \cdot b,\ \infty \cdot c\}$$

przy czym

- P_1 oznacza, że 10-kombinacja zawiera przynajmniej 4 elementy a.
- P_2 oznacza, że 10-kombinacja zawiera przynajmniej 5 elementów b.
- P_3 oznacza, że 10-kombinacja zawiera przynajmniej 6 elementów c.

Liczba 10-kombinacji multzibioru B jest równa liczbie 10-kombinacji multizbioru M, które nie spełniają własności P_1, P_2 ani P_3. Chodzi o liczbę

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = |S| &- (|A_1| + |A_2| + |A_3|)\\ &+ (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.\end{aligned}$$

Mamy

$$|S| = \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

Obliczamy $|A_1|$. Te 10-kombinacje zawierają przynajmniej 4 elementy a. Aby otrzymać taką 10-kombinację bierzemy 4 elementy a i dobieramy 6-kombinację multizbioru M. Liczba możliwości wynosi

$$|A_1| = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28.$$

Podobnie

$$|A_2| = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21,$$

$$|A_3| = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15,$$

$$|A_1 \cap A_2| = 3, \quad |A_1 \cap A_3| = 1, \quad |A_2 \cap A_3| = 0, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$$

Zatem

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = 66 - (28 + 21 + 15) + (3 + 1 + 0) - 0 = 6.$$

2.2 Nieporządki

Na przyjęciu 10 panów zostawiło w szatni swoje kapelusze. Na ile sposobów szatniarz może im zwrócić kapelusze tak, że żaden z panów nie dostanie swojego kapelusza ? Ogólnie rozważamy zbiór X złożony z n elementów ustawionych po kolei (mają przydzielone pozycje). Ile jest ustawień zbioru X, w którym żaden element nie znajduje się na swoim miejscu ? Możemy przyjąć, że

$$X = \{1, 2, \ldots, n\},$$

i elementy są ustawione po kolei.

$$1\,2\,3 \ldots n.$$

Nieporządkiem nazywamy ustawienie (permutację) liczb postaci

$$i_1 i_2 \ldots l_n$$

taką, że $i_1 \neq 1$, $i_2 \neq 2$, $\ldots$ $i_n \neq n$. Tzn. żadna z liczb $1, 2, \ldots, n$ nie pojawia się na swojej naturalnej pozycji. Niech D_n oznacza liczbę wszystkich nieporządków. Mamy $D_n \leq n!$, bo $n!$ jest liczbą wszystkich permutacji. Mamy

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = 2.$$

Twierdzenie 5. *Dla* $n \geq 1$

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Dowód. Niech S oznacza liczbę wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dla $j = 1, 2, \ldots, n$ symbol P_j oznacza własność, że w permutacji liczba j znajduje się na swojej naturalnej pozycji, czyli na miejscu j. Chcemy obliczyć

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n|.$$

Mamy

$$|A_j| = (n-1)!,$$

bo ustawiamy j na pozycji j i obliczamy liczbę permutacji pozostałych $n-1$ liczb $1, 2 \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$. Podobnie

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!,$$

bo ustawiamy i oraz j na ich naturalnych pozycjach i obliczamy liczbę permutacji pozostałych $n-2$ liczb. Ogólnie

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
|D_n| &= |S| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \\
&= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\
&= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).
\end{aligned}$$

□

Liczby D_n spełniają

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}), \qquad n \geq 3. \tag{12}$$

To jest przykład relacji rekurencyjnej. Mając $D_1 = 0$ i $D_2 = 1$ możemy obliczyć D_3 i następne wartości D_n.

$$\begin{aligned}
D_3 &= 2(D_1 + D_2) = 2, \\
D_4 &= 3(D_2 + D_3) = 9, \\
D_5 &= 4(D_3 + D_4) = 44, \\
D_6 &= 5(D_4 + D_5) = 265.
\end{aligned}$$

Relację (12) można wyprowadzić z Twierdzenia 4. Można też podać uzasadnienie kombinatoryczne (**zadanie**).

Ze wzoru (12) po przekształceniu otrzymamy

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}]$$

Przyjmując oznaczenie $E_n = D_n - nD_{n-1}$ mamy $E_n = -E_{n-1}$. Zatem

$$E_n = -E_{n-1} = E_{n-2} = -E_{n-3} = \ldots = (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1) = (-1)^n.$$

Otrzymaliśmy

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

3 Relacje rekurencyjne

Przykładem relacji rekurencyjnej jest wzór (12). Inny prosty przykład to

$$h(n) = 2h(n-1), \quad n \geq 1,\ h(0) = 1,$$

którego rozwiązaniem jest $h(n) = 2^n$. Równanie wiążące $h(n)$ z poprzednimi wyrazami ciągu, prawdziwe dla wszystkich n nazywamy ***relacją rekurencyjną***.

3.1 Ciąg Fibonacci'ego (1202)

Para królików żyje w odosobnieniu. Każdego miesiąca samica wydaje na świat nową parę królików przeciwnych płci. Poczynając od ukończenia drugiego miesiąca życia każda nowa para królików wydaje na świat parę królików. Znaleźć liczbę par królików po n miesiącach.

Niech $f(n)$ oznacza liczbę par na początku n-tego miesiąca, czyli po $n-1$ miesiącach. Wtedy

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = f(2) + f(1) = 3.$$

Ogólnie

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \qquad n \geq 3,$$

bo $f(n-1)$ oznacza ilość par na początku poprzedniego $n-1$ miesiąca, a $f(n-2)$ liczbę par nowo narodzonych królików. Liczby $f(n)$ nazywamy ***liczbami Fibonacci'ego***. Początkowe wartości to

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

Dla wygody określmy wartość $f(0) = 1$. Wtedy wzór rekurencyjny jest spełniony również dla $n = 2$, bo $f(2) = 2 = f(1) + f(0)$, czyli

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \quad n \geq 2, \\ f(0) &= f(1) = 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Chcemy znaleźć wzór na $f(n)$ pozwalający obliczyć tę wartość bezpośrednio. Zignorujmy warunki początkowe i poszukajmy rozwiązania (13) w postaci $f(n) = q^n$. Wtedy

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2}.$$

Po podzieleniu obu stron przez q^{n-2} i przeniesieniu wyrazów na lewą stronę otrzymamy
$$q^2 - q - 1 = 0.$$
Równanie ma dwa rozwiązania
$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
To oznacza, że ciągi
$$f(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
są rozwiązaniami równania (13). Stąd również każdy ciąg postaci
$$f(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
jest rozwiązaniem tego równania, bo równanie jest liniowe. Spróbujmy dobrać współczynniki c_1 i c_2 tak, aby spełnione były warunki początkowe
$$f(0 = 1, \quad f(1) = 1.$$
Otrzymujemy układ dwu równań
$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1. \end{aligned}$$
Zatem
$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
Twierdzenie 6. *Liczby Fibonacci'ego wyrażają się wzorem*
$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Moglibyśmy rozważyć inne warunki początkowe $f(0) = a$, $f(1) = b$ i też znaleźlibyśmy c_1 i c_2, bo wyznacznik główny układu równań

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= a, \\ c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} &= b \end{aligned}$$

wynosi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{5} \neq 0.$$

3.2 Liniowe relacje rekurencyjne ze stałymi współczynnikami

Chodzi o relacje typu

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \quad n \geq k,$$

gdzie a_1, $a_2, \ldots$, a_k są stałymi współczynnikami. Wartość $f(n)$ jest wyznaczona przez wartości poprzednich k wyrazów ciągu. Mówimy, że relacja ma rząd k, o ile $a_k \neq 0$, bo inaczej redukuje się do relacji niższego rzędu. Relacja jest liniowa, bo wartości ciągu pojawiają się w pierwszej potędze. Relacja jest jednorodna, bo nie ma wyrazów wolnych. (13) jest przykładem takiej relacji rzędu 2. Z kolei relacja

$$f(n) = 3f(n-1)^2 + f(n-2), \qquad n \geq 2$$

nie jest liniowa a relacja

$$f(n) = (n+2)f(n-1) + 2f(n-2)$$

nie ma stałych współczynników.

Twierdzenie 7. *Rozważmy relację rzędu 2*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2), \qquad n \geq 2, \tag{14}$$

gdzie $a_2 \neq 0$. *Jeśli pierwiastki* q_1 *i* q_2 *równania*

$$x^2 - a_1 x - a_2 = 0 \tag{15}$$

są różne, to rozwiązanie ma postać

$$f(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n.$$

Uwaga. Dopuszczamy, że równanie (14) ma wyróżnik ujemny. Wtedy równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych. Użyjemy tych samych wzorów pomimo, że liczby q_1 i q_2 nie są rzeczywiste.

Rozważmy relację rekurencyjną

$$f(n) = 2f(n-1) - 2f(n-2).$$

Wtedy (14) ma postać

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Zatem

$$q_1 = 1 + i, \quad q_2 = 1 - i$$

oraz

$$f(n) = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n.$$

Niech $f(0) = 2$ i $f(1) = 4$. Wtedy $c_1 = 1 - i$ i $c_2 = 1 + i$. Ostatecznie

$$f(n) = (1-i)(1+i)^n + (1+i)(1-i)^n = 2(1+i)^{n-1} + 2(1-i)^{n-1}.$$

Rozwiązanie jawne równania rekurencyjnego wymagało użycia liczb zespolonych mimo, że liczby $f(n)$ są całkowite. Podobnie rozwiązanie jawne równania Fibonacci'ego wymagało użycia liczb niewymiernych mimo, że wartości $f(n)$ są liczbami naturalnymi.

3.3 Dowód Twierdzenia 6

Dowód. Wiemy już, że $f(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$ jest rozwiązaniem równania (14). Chcemy pokazać, że każde rozwiązanie (14) ma taką postać. Niech $f(n)$ będzie rozwiązaniem (14). Wartości $f(n)$ są wyznaczone przez $f(0)$ i $f(1)$. Chcemy pokazać, że dla pewnych współczynników c_1 i c_2 mamy

$$f(n) = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n.$$

Obie strony spełniają (14). Jeśli obie strony będą równe dla $n = 0$ i $n = 1$, to będą równe dla pozostałych wartości, czyli dla $n \geq 2$. Dowód będzie zakończony, jeśli znajdziemy rozwiązanie c_1 i c_2 układu równań

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= f(0), \\ c_1 q_1 + c_2 q_2 &= f(1). \end{aligned}$$

Wyznacznik główny układu to

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = q_2 - q_1 \neq 0.$$

Zatem układ ma jednoznaczne rozwiązanie

$$c_1 = \frac{f(0)q_2 - f(1)}{q_2 - q_1}, \qquad c_2 = \frac{f(1) - f(0)q_1}{q_2 - q_1}.$$

$\square$

Co zrobić, gdy równanie (15) ma podwójny pierwiastek q? Tzn. $q = \frac{a_1}{2}$ oraz $a_2 = -q^2$. W tym przypadku rozwiązanie ogólne ma postać

$$f(n) = c_1 q^n + c_2 n q^n.$$

Rzeczywiście, wiemy, że $f(n) = q^n$ jest rozwiązaniem (15). Sprawdzamy $f(n) = nq^n$.

$$\begin{aligned} a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) &= a_1(n-1)q^{n-1} + a_2(n-2)q^{n-2} \\ &\qquad 2(n-1)q^n - (n-2)q^n = nq^n. \end{aligned}$$

3.4 Niejednorodne relacje rekurencyjne

Przykład

$$f(n) = 3f(n-1) - 4n, \qquad f(0) = 2. \tag{16}$$

Zauważmy, że jeśli dwa ciągi $f_1(n)$ i $f_2(n)$ spełniają relację (z wyłączeniem warunku początkowego), tzn.

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 3f_1(n-1) - 4n, \\ f_2(n) &= 3f_2(n-1) - 4n, \end{aligned}$$

to odejmując stronami otrzymamy, że to ciąg $f(n) = f_1(n) - f_2(n)$ spełnia

$$f(n) = 3f(n-1).$$

W związku z tym najpierw rozwiązujemy relację jednorodną $f(n) = 3f(n-1)$. Otrzymujemy $f(n) = c\,3^n$. Następnie szukamy jakiegokolwiek (tzw. szczególnego) rozwiązania równania oryginalnego. Jego forma zależy od postaci składnika powodującego niejednorodność. Przyjmijmy $f(n) = pn + q$. Dobierzemy wartości parametrów p i q tak, aby spełniona była zależność rekurencyjna.

$$\begin{aligned} pn + q &= 3[p(n-1) + q] - 4n \\ pn + q &= (3p-4)n + (3q - 3p). \end{aligned}$$

Stąd

$$3p - 4 = p, \qquad q = 3q - 3p.$$

Czyli $p = 2$ i $q = 3$. Zatem $f(n) = 2n + 3$ jest rozwiązaniem równania niejednorodnego.

Następnie szukamy rozwiązania równania z uwzględnieniem warunku początkowego w postaci

$$f(n) = c\,3^n + 2n + 3.$$

Dobieramy c tak, aby $f(0) = 2$, czyli $c = -1$. Ostatecznie

$$f(n) = 2n + 3 - 3^n.$$

Zadanie: Wykazać, że jeśli ciągi $f_1(n)$ i $f_2(n)$ spełniają relację (16) to ciąg $r(n) = f_1(n) - f_2(n)$ spełnia relację jednorodną, tzn.

$$r(n) = 3r(n-1).$$

Wieża w Hanoi. Mamy trzy paliki i n różnych dysków ułożonych według rozmiaru od największego do najmniejszego na jednym z palików. Chcemy przenieść dyski na inny palik, ale nie wolno położyć większego dysku na mniejszym. Ile ruchów trzeba wykonać ?

Niech $h(n)$ oznacza liczbę ruchów. Mamy

$$h(0) = 0, \quad h(1) = 1, \quad h(2) = 3.$$

Spróbujemy znaleźć zależność rekurencyjną. Aby przenieść n dysków trzeba przenieść $n-1$ dysków na jeden z palików, następnie przenieść największy dysk na wolny palik i znowu przenieść $n-1$ dysków . Zatem

$$h(n) = 2h(n-1) + 1, \qquad n \geq 1.$$

$h(n) = c\,2^n$ jest rozwiązaniem równania jednorodnego. $f(n) = -1$ jest rozwiązaniem szczególnym. Ostatecznie

$$h(n) = c\,2^n - 1 = 2^n - 1$$

jest rozwiązaniem relacji rekurencyjnej.

3.5 Liczby Catalana

Rozważamy n liczb a_1, a_2, ..., a_n. Na ile sposobów można je wymnożyć ? (kolejność czynników jest istotna). Niech $f(n)$ oznacza liczbę wszystkich wymnożeń. Mamy $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ (a_1a_2, a_2a_1). Dalej $h(3) = 12$, bo

$$a_1(a_2a_3),\ (a_2a_3)a_1$$

są dwoma sposobami wymnożenia. Zamieniając rolami 1, 2 i 3 otrzymamy $2\times 6 = 12$ sposobów wymnożenia.

Pomnożenie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wymaga $n-1$ mnożeń dwu liczb. Rozważmy $h(n-1)$ iloczynów dla liczb a_1, $a_2, \ldots, a_{n-1}$. W każdym iloczynie występuje $n-2$ mnożeń. Możemy dołączyć czynnik a_n na jeden z trzech sposobów:

(1) pomnożyć przez a_n po każdej stronie każdego z dwu czynników w $n-2$ mnożeniach;

(2) pomnożyć przez a_n na końcu;

(3) pomnożyć przez a_n ma początku

Zatem

$$f(n) = 2(2n-3)2(2n-5)\ldots 2(3)2f(1) = 2^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)$$
$$2^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n-2)} = 2^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}.$$

Załóżmy, że w tworzeniu iloczynu porządek a_1, $a_2, \ldots, a_n$ musi być zachowany. Tzn. iloczyn $a_1(a_2a_3)$ jest dopuszczalny, ale $(a_1a_3)a_2$ nie jest dozwolony. Niech $g(n)$ oznacza liczbę iloczynów, gdy porządek czynników ma być zachowany. Zatem

$$g(n) = \frac{1}{n!}f(n)$$

czyli

$$g(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}. \tag{17}$$

Okazuje się, że liczby $g(n)$ spełniają wzór rekurencyjny znacznie bardziej skomplikowany od poznanych wcześniej. W iloczynie a_1, a_2, ..., a_n w podanej kolejności jest ostatnie mnożenie do wykonania pomiędzy iloczynem a_1, $a_2, \ldots, a_k$ oraz iloczynem a_{k+1}, $a_{k+2}, \ldots, a_n$. Np. w iloczynie

$$\big(a_1(a_2a_3)\big)\times\big((a_4a_5)(a_6a_7)\big)$$

ostatnie mnożenie jest zaznaczone krzyżykiem. Ponieważ każdy z $g(k)$ iloczynów liczb $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k$ może być pomnożony przez każdy z $g(n-k)$ iloczynów liczb $a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots,\ a_n$, to

$$g(n) = g(1)g(n-1) + g(2)g(n-2) + \ldots + g(n-2)g(2) + g(n-1)g(1),$$

przy czym $g(1) = 1$.

Liczby Catalana pojawiają się przy wielu zagadnieniach kombinatorycznych. Np. gdy chcemy znaleźć liczbę dróg łączących punkt $(0,0)$ z $(n.n)$ złożoną z $2n$ kroków długości 1 wykonywanych w prawo lub w górę znajdujących się w obszarze $y < x$, z wyjątkiem dwu punktów końcowych.

Liczbę dróg od $(0,0)$ do (n,n) opisanych wyżej można obliczyć posługując się trikiem z zastosowaniem symetrii. Zauważmy, że pierwszy krok musi być wykonany w prawo do punktu $(1,0)$, a ostatni do góry od punktu $(n,n-1)$. Ten fragment drogi leży w $y < x$ i składa się z $2n-2$ kroków. Obliczamy najpierw liczbę wszystkich dróg od $(1,0)$ do $(n,n-1)$. Takich dróg jest

$$\binom{2n-2}{n-1}.$$

Teraz obliczymy liczbę dróg od $(1,0)$ do $(n,n-1)$, wykraczających poza obszar $y < x$. Każda taka droga musi dotknąć linii $y = x$ w pewnym punkcie (k,k), gdzie $1 \leq k \leq n-1$. Rozważamy pierwszy taki punkt. Przekształcamy przez symetrię względem prostej $y = x$ początkową część drogi do tego punktu dotknięcia. Otrzymamy drogę łączącą punkt $(0,1)$ z punktem $(n,n-1)$ złożoną z n kroków w prawo i $n-2$ w górę. Takich dróg jest

$$\binom{2n-2}{n}.$$

Odwrotnie, każdej drodze od $(0,1)$ do $(n,n-1)$ odpowiada (poprzez opisaną wcześniej symetrię) droga łącząca $(1,0)$ z $(n,n-1)$, dotykająca linii $y = x$. Zatem liczba dróg, o które nam chodzi to

$$\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

4 Dodatek

Komentarz do zadania 36. Ciąg a_n ma postać

$$a_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}},$$

gdzie występuje n szóstek. Rozważmy wyrażenie

$$g(x) = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6 + \sqrt{x}}}}},$$

gdzie w miejsce ostatniej szóstki wpisana jest zmienna x. Wyrażenie $g(x)$ rośnie wraz ze wzrostem x. Mamy

$$g(0) = a_{n-1}, \quad g(6) = a_n, \quad g(9) = 3.$$

Zatem

$$a_{n-1} < a_n < 3.$$

Badanie tempa zbieżności do granicy. Rozważmy ciąg a_n spełniający wzór rekurencyjny postaci

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n \geq 1$$

dla pewnej funkcji ciągłej i różniczkowalnej $f(x)$. Np. $f(x) = \sqrt{6+x}$. Jeśli ten ciąg jest zbieżny, np. do liczby a, to

$$a = f(a).$$

Przy badaniu zbieżności naturalnymi kandydatami na granicę są więc tzw. punkty stałe funkcji $f(x)$. Jak zbadać, czy faktycznie ciąg a_n jest zbieżny do jakiegoś punktu stałego a ? Jeśli $a_n = a$, to $a_{n+1} = a$, itd. czyli ciąg jest stały. Załóżmy, że $a_n \neq a$. Wtedy analizujemy różnicę $a_n - a$.

$$a_{n+1} - a = f(a_n) - f(a) = \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}(a_n - a) = f'(\xi_n)(a_n - a).$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z twierdzenia Lagrange'a, które mówi, że iloraz różnicowy jest równy pochodnej w pewnym punkcie pośrednim ξ_n, czyli leżącym pomiędzy a_n i a. Jeśli $|f'(\xi_n)| < 1$, to $|a_{n+1}-a| \leq |a_n-a|$. Jeśli dodatkowo pochodna funkcji f' jest ograniczona przez liczbę $c < 1$, to

$$|a_{n+1} - a| \leq c|a_n - a|,$$

zatem

$$|a_n - a| \leq c^{n-1}|a_1 - a|, \tag{18}$$

czyli $a_n \to a$.

W przypadku $f(x) = \sqrt{6+x}$ jedynym punktem stałym jest $a = 3$. Funkcja $f(x)$ jest rosnąca, więc jeśli $x < 3$, to $f(x) < f(3) = 3$. Przyjmując $a_1 = \sqrt{6} < 3$ otrzymujemy

$$a_2 = f(a_1) < f(3) = 3.$$

Dalej

$$a_3 = f(a_2) < f3) < 3,$$

itd., tzn. $a_n < 3$. Ponadto, ponieważ $a_0 < a_1$, to z monotoniczności

$$a_2 = f(a_1) < f(a_0) = a_1,$$

Dalej

$$a_3 = f(a_2) < f(a_1) = a_2,$$

itd., tzn. $a_n < a_{n-1}$. Dla $x \geq a_1 = \sqrt{6}$ mamy

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{6+\sqrt{6}}} < \frac{1}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{2^{5/2}}.$$

Stąd na podstawie (17) otrzymujemy

$$0 < 3 - a_n \leq \frac{1}{2^{5n/2}}(3 - a_1) = \frac{3-\sqrt{6}}{2^{5n/2}}.$$

Jeśli zmienimy warunek początkowy na $a_1 > 3$, np. $a_1 = 4$, to podobnie jak poprzednio można uzasadnić, że $a_n > 3$ oraz, że ciąg a_n jest ściśle malejący. Ponadto dla $x \geq 3$ mamy

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} \leq \frac{1}{6}.$$

Zatem z (17) otrzymamy

$$0 < a_n - 3 \leq \frac{1}{6^{n-1}}(a_1 - 3) = \frac{1}{6^{n-1}}.$$