10. Zadania z programowania matematycznego
do wykładu R. Szwarca

1. Metoda sympleks może prowadzić do cyklu. Załóżmy, że początkowa tabela ma postać

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	3	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0	0	0
x_5	0	$1/4$	-8	-1	9	1	0	0
x_6	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0	1	0
x_7	1	0	0	1	0	0	0	1

Stosujemy metodę sympleks przyjmując następujące zasady:

(a) Wybieramy zmienną niebazową z najbardziej ujemnym kosztem jako tę, która wchodzi do bazy.

(b) Ze zmiennych bazowych, które mogą wyjść z bazy wybieramy tę o najmniejszym indeksie.

Sprawdzić, że po 6 iteracjach metody sympleks powrócimy do początkowej tabeli.

2. (*Antycykliczność*) Wektor $x \in \mathbb{R}^n$ nazywamy leksykograficznie dodatnim, jeśli pierwsza niezerowa współrzędna tego wektora jest dodatnia. Mówimy, że wektor x jest większy leksykograficznie od wektora y, jeśli wektor $x - y$ jest leksykograficznie dodatni. Piszemy wtedy, że $x >_L y$. Pokazać, że relacja $>_L$ jest antysymetryczna i przechodnia. Pokazać, że jeśli $x >_L y$ oraz $x' >_L y'$, to $x + x' >_L y + y'$.

Rozważmy początkową tabelę w metodzie sympleks. Pokazać, że przez zmianę nazw zmiennych można założyć, że wszystkie wiersze, poza zerowym, są wektorami leksykograficznie dodatnimi (do wiersza włączamy również element w kolumnie zerowej). Zastosujemy następujące zasady przy iteracji metody sympleks.

(a) Zmienną, która wchodzi do bazy wybieramy jakkolwiek, byle tylko koszt zredukowany $\overline{c}_j$ był ujemny.

(b) Dla każdego i o własności $u_i > 0$, dzielimy i-ty wiersz przez u_i i wybieramy wiersz najmniejszy leksykograficznie. Jeśli l-ty wiersz jest najmniejszy, to zmienna $x_{B(l)}$ wychodzi z bazy.

Pokazać, że

(i) Podczas algorytmu każdy wiersz tabeli, poza wierszem zerowym, jest leksykograficznie dodatni.

(ii) Wiersz zerowy rośnie leksykograficznie przy każdej iteracji.

Wywnioskować, że metoda sympleks zatrzyma się po skończonej liczbie kroków.

3. Rozważmy zagadnienie: zminimalizować $c \cdot x$ przy warunkach $Ax \geqslant b$ oraz $x \geqslant 0$, gdzie A jest dowolną macierzą wymiaru $m \times n$. Zagadnienie dualne określamy przez przejście do postaci standardowej i znalezienie zagadnienia dualnego. Pokazać, że otrzymamy w ten sposób zagadnienie: zmaksymalizować $b \cdot y$ przy warunkach $A^T y \leqslant c$, i $y \geqslant 0$. W podobny sposób znaleźć zagadnienie dualne do nowego zagadnienia. Pokazać, że twierdzenia o słabej i mocnej dualności są spełnione w tym przypadku.

4. Znaleźć zagadnienia dualne do zagadnień

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
\multicolumn{9}{c}{\text{zminimalizować } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4} \\
x_1 & & & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 6 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \\
 & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geqslant & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcrcl}
\multicolumn{7}{c}{\text{zminimalizować } x_1 - 2x_2 + 5x_3} \\
x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & \geqslant & 6 \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & \geqslant & 4 \\
7x_1 & & & + & 4x_3 & \geqslant & 2 \\
 & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3} & \geqslant & 0
\end{array}
$$

5. Zmaksymalizować $-x_1 - 2x_2$ przy warunkach $x_1, x_2 \geqslant 0$ oraz

$$
\begin{array}{rcrcr}
-2x_1 & + & 7x_2 & \leqslant & 6 \\
-3x_1 & + & x_2 & \leqslant & -1 \\
9x_1 & - & 4x_2 & \leqslant & 6 \\
x_1 & - & x_2 & \leqslant & 1 \\
7x_1 & - & 3x_2 & \leqslant & 6 \\
-5x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & -3
\end{array}
$$