11. Zadania z programowania matematycznego
do wykładu R. Szwarca

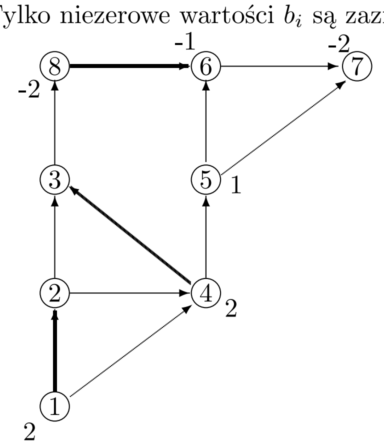
1. Zastosować dualną metodę sympleks do podanych zagadnień.

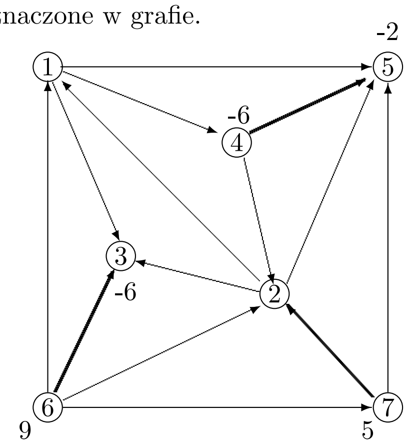
$$\begin{array}{rcrcl} \multicolumn{5}{l}{\min\ x_1 + x_2} \\ x_1 & + & 2x_2 & \geqslant & 2 \\ x_1 & & & \geqslant & 1 \\ & & x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} \multicolumn{7}{l}{\min : x_1 + 3x_2 + x_3} \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & \leqslant & -5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leqslant & 4 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0 \end{array}$$

2. Zastosować prymarno-dualną metodę sympleks do podanych zagadnień.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \multicolumn{7}{c}{\max : x_1 - 3x_2} \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leqslant & -2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leqslant & 1 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} \multicolumn{5}{c}{\max : x_1 + 3x_2} \\ -x_1 & - & x_2 & \leqslant & -3 \\ -x_1 & + & x_2 & \leqslant & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 2 \\ & & x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{array}$$

3. W grafach, niektóre krawędzie narysowane są pogrubioną kreską. Rozszerzyć zbiór krawędzi tak, aby otrzymać drzewo rozpinające. Za każdym razem znaleźć odpowiadający przepływ sieciowy. Zakładamy, że pojemności krawędzi są nieograniczone. Tylko niezerowe wartości b_i są zaznaczone w grafie.





4. Graf G posiada n wierzchołków i m krawędzi, przy czym $m < n - 1$. Pokazać, że G nie jest spójny.

5. Graf spójny G ma n wierzchołków i $n + 1$ krawędzi. Ile cykli posiada graf G ?

6. Pewna firma ma dostarczyć klientowi r_i obrusów każdego z N dni. Firma może zakupić obrusy w cenie p złotych za sztukę lub wyprać zużyte obrusy. Pranie można wykonać ekspresowo w ciągu n dni w cenie f złotych za sztukę, lub normalnie w ciągu m dni ($m > n$) w cenie g złotych za sztukę ($g < f$). Firma chce zorganizować dostarczanie obrusów, aby koszt był jak najmniejszy. Pokazać, że zagadnienie można sformułować w języku przepływów sieciowych. `Wskazówka:` Dla każdego dnia przypisać wierzchołek grafu odpowiadający czystym obrusom i wierzchołek odpowiadający brudnym obrusom; być może będzie trzeba dodać inne wierzchołki. Narysować sieć dla $N = 5$, $n = 2$ i $m = 4$.

7. Sformułować zagadnienie najkrótszej drogi w języku programowania liniowego.

8. (Algorytm Dijkstry) Rozważamy spójny graf (nieskierowany) $G = (N, E)$ przy czym każdej krawędzi $\{x, y\}$ przypisana jest liczba nieujemna c_{xy} nazywana długością krawędzi. Chcemy znaleźć najkrótszą drogę łączącą wierzchołek u z innym wierzchołkiem. Oznaczamy każdy wierzchołek x symbolem $l(x)$.

(a) Kładziemy $l(u) = 0$ oraz $l(x) = +\infty$ dla $x \neq u$.
(b) Niech $S = N$.
(c) Obliczamy $\min_{v \in S} l(v)$ i wybieramy wierzchołek x, w którym osiągnięte jest minimum.
(d) Niech $S := S \setminus \{x\}$.
(e) Jeśli S jest pusty, algorytm zatrzymuje się.
(f) Dla każdego $y \in S$ zastąp $l(y)$ przez $\min\{l(y), l(x) + c_{xy}\}$.
(g) Wróć do punktu (c).

Gdy algorytm zatrzyma się, to $l(x)$ oznacza odległość od u do x. Zastosować algorytm dla grafu poniżej.