

2. Zadania z programowania matematycznego
do wykładu R. Szwarca

1. Sprawdzić, czy podane zbiory są wielościanami.

(a) Zbiór punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających

$$\begin{aligned}x \cos \theta + y \sin \theta &\leq 1, \quad \forall \theta \in [0, \pi/2], \\x &\geq 0, \\y &\geq 0.\end{aligned}$$

(b) Zbiór punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 15 &\leq 0, \\y &\geq 0.\end{aligned}$$

2. Pokazać, że dla funkcji wypukłej $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i stałej c zbiór $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < c\}$ jest wypukły.

3. Naszkicować powłokę wypukłą wektorów $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(-2, 2)$, $(1, 4)$, $(0, 3)$, $(-1, 1)$, $(\frac{1}{2}, 4)$, $(-1, 2)$ i $(2, 5)$. Znaleźć wierzchołki. Punkty, które nie są wierzchołkami wyrazić jako kombinacje wypukłe wierzchołków.

4. Naszkicować obszar określony nierównościami i znaleźć wierzchołki.

$$\begin{aligned}-2x_1 + 5x_2 &\leq 10 & 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\x_1 + 2x_2 &\geq 2 & -x_1 + 3x_2 &\leq 3\end{aligned}$$

5. Przedstawić układ nierówności z zadania 4 jako układ nierówności o zmiennych nieujemnych.

6. Rozwiązać następujące zagadnienia metodą graficzną:

(a) Warunki

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 &\geq -2 & x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\x_1 &\geq 0 & x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Zmaksymalizować funkcje: x_2 , $3x_1 + 2x_2$, $2x_1 + 4x_2$. Zminimalizować funkcje $2x_1 - 2x_2$, $-3x_1 - 2x_2$.

(b) Warunki

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 &\leq 6 & x_1 - x_2 &\geq -1 & -x_1 - 2x_2 &\geq 1 \\x_1 &\geq 0 & x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Zmaksymalizować $2x_1 - 6x_2$.

(c) Warunki

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 &\leq 6 & 2x_1 + 4x_2 &\geq 8 & x_1 - 3x_2 &\geq -6 \\x_1 &\geq 0 & x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Zmaksymalizować $2x_1 + 3x_2$, $x_1 - 2x_2$, $x_1 - 3x_2$, $x_1 - 6x_2$. Zminimalizować $x_1 + 2x_2$.

(d) Warunki

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 & x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1 & x_1 &\geq 0 \\x_2 &\geq 0 & x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

Zmaksymalizować $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 - 3x_3$. Zminimalizować $x_1 + x_3$.