3. Zadania z programowania matematycznego do wykładu R. Szwarca

1. Niech $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6,\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0\}$. Znaleźć punkty ekstremalne. Dla każdego z tych punktów wskazać funkcję celu. która przyjmuje minimum tylko w tym punkcie. Znaleźć punkty bazowe, które nie są dopuszczalnymi rozwiązaniami bazowymi. Wskazać rozwiązania dopuszczalne, które nie są bazowe. W każdym z tych punktów wskazać warunki aktywne.

2. Znaleźć wszystkie bazowe rozwiązania dopuszczalne dla warunków $x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$ oraz

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3, \\ 6x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 6x_4 & = & 2. \end{array}$$

3. Skonstruować zagadnienie programowania liniowego dla trzech zmiennych $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

(a) o jednoznacznym rozwiązaniu optymalnym w punkcie wierzchołkowym,

(b) o rozwiązaniach optymalnych w 3 punktach wierzchołkowych,

(c) o rozwiązaniach optymalnych w 4 punktach wierzchołkowych.

4. Znaleźć wszystkie bazowe rozwiązania dopuszczalne dla warunków $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$ oraz

$$\begin{array}{ccccrcrcl} x_1 & & & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 4, \\ & x_2 & & - & x_4 & + & x_5 & = & 3, \\ & & x_3 & + & 3x_4 & - & 2x_5 & = & 6. \end{array}$$

5. Rozważyć zagadnienie $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$ oraz

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 3, \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4. \end{array}$$

Znaleźć bazowe rozwiązanie dopuszczalne postaci $(x_1, x_2, 0)$. Czy istnieją bazowe rozwiązania dopuszczalne postaci $(x_1, 0, x_3)$ lub $(0, x_2, x_3)$?

6. Dany jest układ nierówności

$$\begin{array}{rcll} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n & \leqslant & 1, & i = 1, \ldots, m, \\ x_j & \geqslant & 0, & j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Przy jakich warunkach, zbiór rozwiązań tego układu nie tworzy ograniczonego podzbioru $\mathbb{R}^n$?

***7.** (Twierdzenie Carathéodory'ego) Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będzie rodziną wektorów w $\mathbb{R}^m$.

(a) Niech $C = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0 \right\}$. Pokazać, że każdy element zbioru C można przedstawić w postaci $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$, gdzie $\lambda_i \geqslant 0$, i co najwyżej m współczynników λ_i jest różnych od zera. `Wskazówka:` Rozważyć punkty ekstremalne wielościanu

$$\Lambda = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = y,\ \lambda_i, \ldots, \lambda_n \geqslant 0 \right\}.$$

(b) Niech P będzie powłoką wypukłą wektorów A_i. Pokazać, że każdy element z P można wyrazić w postaci $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$, gdzie $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, oraz co najwyżej $m+1$ współczynników λ_i różni się od zera.