4. Zadania z programowania matematycznego
do wykładu R. Szwarca

## Zagadnienie transportowe

Mamy $m$ dostawców i $n$ odbiorców danego towaru. $i$-ty dostawca może dostarczyć $a_i > 0$ jednostek towaru. Zapotrzebowanie $j$-tego odbiorcy wynosi $b_j > 0$ jednostek. Zakładamy, że całkowity popyt $\sum_{j=1}^{n} b_j$. jest równy całkowitej podaży $\sum_{i=1}^{m} a_i$ Koszt dostarczenia jednostki towaru od $i$-tego dostawcy do $j$-tego odbiorcy wynosi $c_{ij}$. Niech $x_{ij}$ oznacza ilość towaru przewiezionego od $i$-tego dostawcy do $j$-tego odbiorcy. Zagadnienie transportowe to

$$
\begin{aligned}
\text{zminimalizować} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{przy warunkach} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \\
& x_{ij} \geqslant 0, \qquad \forall i, j.
\end{aligned}
$$

**1.** Pokazać, że warunki zadane równościami nie są liniowo niezależne. Pokazać, że wśród tych warunków jest $m + n - 1$ warunków liniowo niezależnych.

**2.** Niech $X = \{x_{ij}\}$ będzie rozwiązaniem bazowym. Pokazać, że tylko $m + n - 1$ wyrazów macierzy $X$ może różnić się od zera.

**3.** Niech $X = \{x_{ij}\}$ będzie rozwiązaniem bazowym. Niech $B = \{(i, j) \mid x_{ij} \neq 0\}$. Pokazać, że $B$ nie zawiera cyklu, czyli ciągu różnych komórek postaci $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_{k-1}), (i_k, j_1)$. `Wskazówka:` Załóżmy, że $B$ zawiera cykl. Pokazać, że warunki aktywne w $X$ nie wyznaczają rozwiązania $X$ jednoznacznie. W tym celu rozważyć macierz $X^*$ taką, że $x^*_{ij} = x_{ij}$ dla $(i, j)$ spoza cyklu oraz $x^*_{i_1,j_1} = x_{i_1,j_1} - \delta$, $x^*_{i_1,j_2} = x_{i_1,j_2} + \delta$, $x^*_{i_2,j_2} = x_{i_2,j_2} - \delta$, $\ldots$, $x^*_{i_k,j_{k-1}} = x_{i_k,j_{k-1}} - \delta$, $x^*_{i_k,j_1} = x_{i_k,j_1} + \delta$. Pokazać, że warunki aktywne w $X^*$ i w $X$ są takie same.

**4.** Dla macierzy $X$ poniżej rozstrzygnąć, czy $X$ jest rozwiązaniem bazowym oraz czy $X$ jest dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym (puste komórki oznaczają zera).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | 1 | | |
| | 3 | | 2 | | | |
| | | | | 4 | | 1 |
| | | 3 | 2 | 1 | 5 | |
| | 1 | | | | | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 9 | | |
| | 1 | | 4 |
| | | 3 | |
| 2 | | | 3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | | | | 2 |
| | | | −1 | 3 | |
| 2 | | 6 | | | |
| | | | 7 | | 5 |
| | | 2 | | 1 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| | 1 | 1 | | | |
| | | 1 | 1 | | |
| | | | 1 | 1 | |
| | | | | 1 | 1 |

**5.** Dla każdej macierzy z poprzedniego zadania wyznaczyć liczby $a_i$ oraz $b_j$.

***6.** Załóżmy, że pewien zbiór komórek $(i, j)$ w macierzy wymiaru $m \times n$ zawiera więcej niż $m+n-1$ elementów. Pokazać, że ten zbiór zawiera cykl.

**7.** Bazą $B$ nazywamy zbiór $m + n - 1$ komórek nie zawierający cyklu. Niech $X$ będzie dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym takim, że $x_{ij} = 0$ dla $(i, j) \notin B$. Pokazać, że istnieją liczby $u_1, \ldots, u_m$ i $v_1, \ldots, v_n$ takie, że $c_{ij} + u_i + v_j = 0$ dla $(i, j) \in B$. Znaleźć te liczby dla macierzy $C = \{c_{ij}\}$, gdzie $B$ jest zbiorem komórek, w których stoją liczby (symbol $*$ oznacza jakiś koszt).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $*$ | 3 | $*$ | $*$ | $*$ | 2 |
| $*$ | $*$ | $*$ | 1 | 3 | $*$ |
| 2 | $*$ | 6 | $*$ | $*$ | $*$ |
| $*$ | $*$ | $*$ | 7 | $*$ | 5 |
| $*$ | $*$ | 2 | $*$ | 1 | $*$ |

**8.** Niech $B$ i $X$ będą jak w poprzednim zadaniu. Niech $C(B)$ oznacza macierz o wyrazach $C(B)_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j$. Pokazać, że jeśli $X$ jest optymalnym rozwiązaniem przy macierzy kosztów $C$, to $X$ jest również optymalnym rozwiązaniem przy macierzy kosztów $C(B)$. Wiemy, że $C(B)_{ij} = 0$ dla $(i, j) \in B$. $^*$ Pokazać, że $X$ jest optymalnym rozwiązaniem zagadnienia transportowego, jeśli $C(B)_{ij} \geqslant 0$ dla $(i, j) \notin B$.