6. Zadania z programowania matematycznego
do wykładu R. Szwarca

Zagadnienie transportowe - konstrukcja bazowego rozwiązania dopuszczalnego

Procedura ogólna rozpoczyna się od rozważenia wszystkich linii (tzn. wierszy i kolumn) macierzy zagadnienia transportowego. Kolejno wykonywane kroki polegają na:

(a) Z pozostałych linii wybrać następną komórkę bazową zgodnie z pewnym przyjętym kryterium.

(b) Wybranej komórce przydzielić wartość tak, aby zużyć pozostałą w jej wierszu podaż lub pozostały w jej kolumnie popyt (którakolwiek liczba jest mniejsza).

(c) Wyeliminować (skreślić) tę linię z dalszych rozważań. (Jeśli i wiersz i kolumna mają taką samą pozostałą podaż i popyt, to wyeliminować wiersz. Kolumna będzie użyta później do wybrania *zdegenerowanej* komórki, tzn. takiej, że $x_{ij} = 0$.)

(d) Jeśli pozostała tylko jedna linia do rozważenia, to procedura polega na wybraniu wszystkich pozostałych tam komórek (tzn. tych komórek, które nie były wcześniej wybrane ani też wyeliminowane przez skreślenie ich linii) i umieszczeniu w nich wartości wyznaczonych w jedyny możliwy sposób.

Stosowane są następujące metody dotyczące kroku (a).

(i) (*Metoda kąta północno-zachodniego Dantziga*) Zaczynamy od wybranie komórki (1,1). Następnie jeśli (i, j) była ostatnią wybraną komórką bazową, to wybieramy $(i, j+1)$, o ile pozostała jakaś podaż u dostawcy j. W przeciwnym wypadku wybieramy $(i+1, j)$.

(ii) (*Metoda aproksymacyjna Vogla*) Dla każdej linii, które pozostały w rozważaniach, obliczamy **pierwszą różnicę** poprzez odjęcie od siebie najmniejszego i następnego najmniejszego kosztu c_{ij}, spośród komórek, które jeszcze pozostały w tej linii. W linii, w której ta różnica jest największa wybieramy komórkę, której odpowiada najmniejszy koszt. Jeśli najmniejsza różnica powtarza się lub najmniejszy koszt powtarza się, to wyboru dokonujemy dowolnie.

(iii) (*Metoda aproksymacyjna Russela*) Dla każdego wiersz i pozostałego w rozważaniach wyznaczamy liczbę $\overline{u}_i$, która jest największym kosztem c_{ij} spośród pozostałych w tym wierszu. Dla każdej kolumny j pozostałej w rozważaniach wyznaczamy liczbę $\overline{v}_j$, która jest największym kosztem c_{ij} spośród pozostałych w tej kolumnie. Dla każdej komórki (i, j), nie wybranej wcześniej w tych wierszach i kolumnach, obliczamy $\Delta_{ij} = c_{ij} - \overline{u}_i - \overline{v}_j$. Wybieramy komórkę z najbardziej ujemną wartością Δ_{ij}. W przypadku niejednoznaczności, wyboru dokonujemy dowolnie.

1. Zastosować każdą z opisanych metod do podanych macierzy kosztów. Liczby popytu i podaży są zapisane w prawej kolumnie i w dolnym wierszu. Porównać koszt otrzymanych rozwiązań bazowych.

3	7	6	4	5
2	4	3	2	2
4	3	8	5	3
3	3	2	2	

3	2	1	2	3	1
5	4	3	1	1	6
0	2	3	4	5	7
3	3	3	2	3	

2. Załóżmy, że wielkości popytu i podaży są liczbami całkowitymi. Pokazać, że każde rozwiązanie bazowe X zagadnienia transportowego ma współrzędne całkowite.

3. Załóżmy, że (patrz lista 4) całkowita podaż jest większa od całkowitego popytu. Nasze zagadnienie to

$$\begin{aligned} &\text{zminimalizować} && \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ &\text{przy warunkach} && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, && j = 1, \ldots, n, \\ & && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, && i = 1, \ldots, m, \\ & && x_{ij} \geqslant 0, && \forall i, j. \end{aligned}$$

Wprowadzamy pozornego odbiorcę, którego popyt ustalamy na całkowitą wartość pozostałej podaży i przyjmujemy zerowy koszt dostarczenia towaru do tego odbiorcy. Otrzymujemy zagadnienie transportowe, gdzie popyt jest zrównoważony z podażą. Pokazać, jak z optymalnego rozwiązania nowego zagadnienia można otrzymać optymalne rozwiązanie oryginalnego zagadnienia. Opisać analogiczną procedurę postępowania, gdy popyt jest większy niż podaż.