7. Zadania z programowania matematycznego
do wykładu R. Szwarca

1. Rozważmy zagadnienie PL: zminimalizować funkcje celu cx przy warunkach $Ax \geqslant b$ oraz $x \geqslant 0$, gdzie A jest macierzą $m \times n$, $c, x \in \mathbb{R}^n$ oraz $b \in \mathbb{R}^m$. Sprowadzając do postaci standardowej wprowadzamy nowe zmienne $y \in \mathbb{R}^m$ i rozważamy zagadnienie: zminimalizować funkcję celu cx przy warunkach $Ax - y = b$ oraz $x, y \geqslant 0$. Pokazać, że jeśli (x^*, y^*) jest optymalnym rozwiązaniem nowego zagadnienia, to x^* jest optymalnym rozwiązaniem zagadnienia oryginalnego. Zapisać nowe zagadnienie w postaci macierzowej, tzn. $\mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b$. Jaki jest rząd macierzy $\mathcal{A}$? Niech (x, y) będzie bazowym rozwiązaniem nowego zagadnienia. Ile współrzędnych wektora (x, y) musi się zerować ? Pokazać, że wtedy x jest bazowym rozwiązaniem zagadnienia oryginalnego. Jak postępować przy zagadnieniu: zmaksymalizować cx przy warunkach $Ax \leqslant b$ oraz $x \geqslant 0$?

2. Rozważmy zagadnienie w postaci standardowej: zminimalizować cx przy warunkach $Ax = b$, $x \geqslant 0$, przy czym wiersze macierzy A są liniowo niezależne. Poprzez przemnożenie niektórych wierszy macierzy A przez -1 można założyć, że $b \geqslant 0$. Załóżmy, że zagadnienie posiada rozwiązanie dopuszczalne. Chcemy znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe. Rozważamy pomocniczo zagadnienie: zminimalizować $y_1 + \ldots + y_m$ przy warunkach $Ax + y = b$ oraz $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Pokazać, że wektor $(x, y) = (0, b)$ jest dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym nowego zagadnienia. Niech (x^*, y^*) będzie optymalnym rozwiązaniem nowego zagadnienia. Pokazać, że $y^* = 0$. Pokazać, że wtedy x^* jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym zagadnienia oryginalnego.

3. Rozważmy zagadnienie: zminimalizować $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4$ przy warunkach

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3, \\ & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geqslant & 0. \end{array}$$

Znaleźć rozwiązanie bazowe odpowiadające kolumnom A_3, A_4. Znaleźć kierunki bazowe odpowiadające współrzędnym niebazowym. Znaleźć zredukowany wektor kosztów. Niech d będzie kierunkiem bazowym odpowiadającym zmiennej x_2. Znaleźć θ^*, tzn. taką liczbę dodatnią θ^*, że $y = x + \theta^* d$ jest dopuszczalnym rozwiązaniem bazowym. Z którymi kolumnami macierzy jest związane to rozwiązanie ? Sprawdzić, czy jest optymalne.

4. Rozważmy zagadnienie: zminimalizować $3x_1 + 2x_2$ przy warunkach

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & & & & & = & 4, \\ x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & & & = & 15, \\ 2x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 10 \\ & & & & \multicolumn{5}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5} & \geqslant & 0. \end{array}$$

Znaleźć rozwiązanie bazowe odpowiadające kolumnom A_1, A_2 i A_3. Sprawdzić, czy to rozwiązanie jest optymalne.

5. Rozważmy zagadnienie: zmaksymalizować $x_1 + 2x_2$, przy warunkach

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 3x_2 & \leqslant & 8, \\ x_1 & + & x_2 & \leqslant & 4, \\ & & x_1, x_2 & \geqslant & 0. \end{array}$$

Sprowadzić zagadnienie do postaci standardowej. Znaleźć bazowe rozwiązanie dopuszczalne. Znaleźć rozwiązanie optymalne nowego zagadnienia, iterując metodę z zadania 3.

6. Cztery miasteczka w Stanach Zjednoczonych, Berdoo, Los Devils, San Go i Hollyglass są zaopatrywane w wodę przez agencję Metro Water District. Woda pochodzi z rzek Colombo, Sacron i Calorie, przy czym nie można dostarczyć wody z Calorie do Hollyglas. W tabeli poniżej podane są koszty (w dziesiątkach dolarów na akr razy stopa) dostarczenia wody oraz liczby podaży i popytu (w milionach akrów razy stopa).

	Berdoo	Los Devils	San Go	Hollyglas	Podaż
Colombo	16	13	22	17	50
Sacron	14	13	19	15	60
Calorie	19	20	23	–	50
Min. zapotrzebowanie	30	70	0	10	
Zapotrzebowanie	50	70	30	∞	

Sformułować zagadnienie transportowe związane z podaną sytuacją. `Wskazówka:` W miejsce – wpisać M, które ma symbolizować duży koszt. Zauważyć, że Hollyglass maksymalnie może otrzymać 60 jednostek. Zamienić ∞ na 60. Wtedy maksymalny całkowity popyt przekracza o 50 całkowitą podaż. Wprowadzić pozorną rzekę Widmo, której podaż wody wynosi 50. Miasteczko Berdoo rozdzielić na Berdoo 1 i Berdoo 2, przy czym Berdoo 1 ma popyt 30 natomiast Berdoo 2 ma popyt 20. Ustalić maksymalny popyt dla pozostałych miasteczek. Zauważyć, że przy dowolnym rozwiązaniu dopuszczalnym Holyglass otrzyma przynajmniej 10 jednostek z rzeczywistych rzek. Zaplanować koszt dostarczenia wody z rzeki Widmo do 5 miasteczek używając kosztu 0 i kosztu M.