8. Zadania z programowania matematycznego
do wykładu R. Szwarca

1. Stosując metodę kąta północno-zachodniego znaleźć bazowe rozwiązanie dopuszczalne dla zagadnienia z zadania 6 listy 7. Przy pomocy metody sympleks znaleźć rozwiązanie optymalne. Znaleźć bazowe rozwiązanie dopuszczalne metodą Vogla i porównać z rozwiązaniem optymalnym.

2. Rozważamy zagadnienie w postaci standardowej: zminimalizować $c \cdot x$, przy warunkach $Ax = b$, $x \geqslant 0$, gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$ rzędu m. Niech x będzie bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym odpowiadającym kolumnom bazowym $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$. Niech $W_1, W_2, \ldots, W_m$ oznacza wiersze macierzy A.

(a) Pokazać, że istnieje jedyny układ liczb $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ takich, że wektor

$$c - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i W_i$$

ma zerowe współrzędne o numerach $B(1), \ldots, B(m)$.

(b) Pokazać, że wiersze macierzy $B^{-1}A$ są kombinacjami liniowymi wierszy macierzy A.

(c) Pokazać, że wektor kosztów zredukowanych $\overline{c}$ ma postać

$$c - \sum_{i=1}^{m} \mu_i W_i.$$

(d) Pokazać, że $\mu_i = \lambda_i$.

Wywnioskować, że aby obliczyć koszty zredukowane wystarczy od wektora kosztów odjąć kombinację liniową wierszy macierzy A tak, aby wyzerować koszty odpowiadające współrzędnym bazowym.

3. Przy założeniach poprzedniego zadania: niech $\overline{c}$ oznacza wektor kosztów zredukowanych. Niech $\overline{c}_j < 0$ oraz niech

$$\theta^* = \frac{x_{B(l)}}{u_l},$$

gdzie u_l jest l-tą współrzędną wektora $u = -d_B = B^{-1}A_j$. Wtedy $y = x - \theta^* u$ jest nowym rozwiązaniem bazowym odpowiadającym kolumnom o numerach $B(1), \ldots, B(l-1), j, B(l+1), \ldots, B(m)$. Pokazać, że wektor kosztów zredukowanych względem nowego rozwiązania bazowego można otrzymać odejmując od $\overline{c}$ wiersz l-ty macierzy $B^{-1}A$ pomnożony przez taki współczynnik λ, żeby wyzerować koszt $\overline{c}_j$. Obliczyć ten współczynnik. Pokazać, że

$$-c \cdot y = -c \cdot x - \lambda x_{B(l)}.$$

Tzn. minus koszt odpowiadający rozwiązaniu y można otrzymać odejmując od minus kosztu związanego z x liczbę λ pomnożoną przez l-tą współrzędna wektora x_B.

4. Zastosować metodę sympleks, aby zmaksymalizować $2x_1 + 3x_2$ przy warunkach

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 30 \\ x_1 & + & x_2 & \leqslant & 20, \\ & & x_1, x_2 & \geqslant & 0. \end{array}$$

5. Zmaksymalizować $-x_1 + x_2 + 2x_3$ przy warunkach

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leqslant & 20, \\ -2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leqslant & 60, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leqslant & 50, \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \geqslant & 0. \end{array}$$

6. Sprawdzić, czy następujące stwierdzenia dotyczące metody sympleks są prawdziwe, czy nie.

(a) Przy pewnej iteracji, jeśli istnieją dwie współrzędne bazowe dla których $\theta^* = \frac{x_{B(l)}}{u_l}$, to następne bazowe rozwiązanie dopuszczalne jest zdegenerowane.

(b) Jeśli przy pewnej iteracji nie ma współrzędnej bazowej, która wychodzi z bazy, to zagadnienie nie ma rozwiązań dopuszczalnych.

(c) Jeśli w końcowym rozwiązaniu wektor kosztów zredukowanych zeruje się dla pewnej współrzędnej niebazowej, to zagadnienie posiada kilka rozwiązań optymalnych.

(d) Jeśli zagadnienie ma kilka rozwiązań optymalnych, to zbiór rozwiązań zagadnienia jest ograniczony.