Gra Nim

We wrześniu 1998 podczas miesięcznej wizyty w Monachium w pewną niedzielę wybrałem się z kolegą do Deutsche Museum, jednego z największych muzeów techniki w Europie.

W jednym z pomieszczeń natknęliśmy się na komputer, na którym była zainstalowana gra w patyczki, jak się później dowiedziałem gra o nazwie Nim. W grze mogła uczestniczyć jedna osoba, której przeciwnikiem była maszyna. Na początku gry na ekranie pojawiały się trzy rzędy równolegle ustawionych patyczków. Gra polegała na wykonywaniu ruchów na przemian przez komputer i gracza. W jednym ruchu należało wybrać jeden z trzech rzędów i usunąć z niego dowolną liczbę patyczków. Trzeba było usunąć przynajmniej jeden patyczek, ale wolno było zabrać nawet wszystkie patyczki z tego wybranego rzędu. Przegrywał ten, kto był zmuszony zabrać ostatni patyczek.

Na początku gry, gdy pojawiała się konfiguracja 3 rzędów patyczków, komputer uprzejmie pytał, kto ma zaczynać grę.

Na ekranie mogłaby pojawić się poniższa konfiguracja patyczków:

$$\begin{array}{lr}
| \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | & 16 \\
| \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | & 13 \\
| \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | & 10
\end{array}$$

Można sobie wyobrazić, że gra przebiegałaby wtedy następująco, przyjmując, że zaczynał komputer.

Ruch komputera

$$\begin{array}{lr}
| \; | \; | \; | \; | \; | \; | & 7 \\
| \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | & 13 \\
| \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | & 10
\end{array}$$

Ruch gracza

$$\begin{array}{lr}
| \; | \; | \; | \; | \; | \; | & 7 \\
| \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | & 12 \\
| \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | \; | & 10
\end{array}$$

Ruch komputera

| | | | | |	6
| | | | | | | | | | | |	12
| | | | | | | | | |	10

Ruch gracza

| | | | | |	6
| | |	3
| | | | | | | | | |	10

Ruch komputera

| | | | | |	6
| | |	3
| | | | |	5

Ruch gracza

| |	2
| | |	3
| | | | |	5

Ruch komputera

| |	2
| | |	3
|	1

Ruch gracza

| |	2
|	1
|	1

Ruch komputera

|	1
|	1
|	1

Ruch gracza

|	1
|	1

Ruch komputera

|	1

W ten sposób komputer wygrywa tę grę. Naszym celem będzie opisanie strategii, która prowadzi do sukcesu. Zobaczymy, że w powyższej grze komputer stosował właśnie tę strategię.

Zacznijmy od uproszczonej konfiguracji, gdy na początku gry mamy tylko dwa rzędy patyczków, jednakże więcej niż po jednym patyczku w każdym z nich. Nietrudno odkryć, że warto wykonać pierwszy ruch, gdy ilości patyczków w rzędach nie są równe. Wtedy nasz ruch powinien wyrównać te ilości. Z kolei po ruchu przeciwnika liczby patyczków znowu będą różne. W związku z tym ponownie wyrównujemy ilości patyczków w rzędach. Sposób postępowania zmienimy w sytuacji, gdy po ruchu przeciwnika jeden z rzędów zawiera mniej niż dwa patyczki. To się może zdarzyć tylko dla jednego z rzędów. Tzn. drugi rząd zawiera wtedy przynajmniej dwa patyczki. Załóżmy, że nasz przeciwnik usunie cały rząd. Wtedy my usuwamy z drugiego rzędu wszystkie patyczki poza jednym. Jeśli przeciwnik zmniejszy jeden rząd do jednego patyczka, usuwamy cały drugi rząd.

W przypadku, gdy początkowa konfiguracja składa się z trzech rzędów opis strategii staje się bardziej złożony. Jednakże opis ten jest na tyle uniwersalny, że obejmuje przypadek dowolnej liczby rzędów z patyczkami. Przede wszystkim grę możemy przeformułować następująco. Na początku mamy 3 liczby naturalne (liczby patyczków w poszczególnych rzędach). Ruch gracza polega na zmniejszeniu jednej dowolnie wybranej liczby. Przegrywa ten, kto jest zmuszony wykonać ostatni ruch.

Dla opisania strategii wygrywającej posłużymy się zapisem binarnym, tzn. zapisem liczb w systemie dwójkowym. Taki zapis składa się z ciągu jedynek i zer. Na przykład

$$10011_2 = 2^4 + 2^2 + 1 = 19.$$

Z kolei

$$45 = 32 + 8 + 1 = 2^5 + 2^3 + 1 = 101001_2.$$

W ten sposób możemy zakodować każdą liczbę naturalną. Liczby naturalne będziemy dodawać w pewien szczególny sposób. To działanie będzie inne od zwykłego dodawania liczb i będzie nazwane `sumą Nim`.

W celu dodania dwu liczb zapisujemy je w systemie dwójkowym i dla wygody podpisujemy jedną nad drugą tak, aby ich odpowiednie cyfry znajdowały się w linii pionowej. Na przykład, aby dodać 41 i 27 piszemy

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Następnie dodajemy odpowiednie cyfry znajdujące się jedna pod drugą, przyjmując zasadę $0+0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ oraz $1 + 1 = 0$ i wynik zapisujemy pod kreską.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

To oznacza, że otrzymaliśmy

$$110010_2 = 2^5 + 2^4 + 2 = 50.$$

Nietrudno zauważyć, że możemy wykonać to działanie jednocześnie dodając kilka liczb. Na przykład chcemy obliczyć sumę liczb 10, 13, 22 i 31. Zapisujemy te liczby w systemie dwójkowym jedna pod drugą.

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

Wynik dodawania to

$$1110_2 = 2^3 + 2^2 + 2 = 26.$$

Widać, że sumując cyfry znajdujące się w jednej linii pionowej interesuje nas, czy liczba jedynek jest parzysta czy też nieparzysta. W zależności od tego w wyniku wpisujemy cyfrę 0 lub 1.

Oznaczmy to dodawanie Nim symbolem $\oplus$. Z samego określenia wynika, że wynik nie zależy od kolejności liczb, które dodajemy ani od kolejności wykonywania dodawania, gdy jednocześnie chcemy dodać więcej niż dwie liczby. To znaczy, że

$$a \oplus b \;=\; b \oplus a,$$
$$(a \oplus b) \oplus c \;=\; a \oplus (b \oplus c).$$

Z naszych obliczeń wynika, że

$$41 \oplus 27 = 50, \quad 10 \oplus 13 \oplus 22 \oplus 31 = 26.$$

W zasadzie, aby wykonać działanie $\oplus$ zamiast posługiwać się zapisem binarnym liczby, możemy poprzestać na zapisie jej za pomocą potęg liczby 2. W tym celu zauważmy kilka prostych własności. Przy dodawaniu do siebie tych samych potęg dwójki otrzymamy zero, tzn. $4 \oplus 4 = 0$, $16 \oplus 16 = 0$. Ogólniej, dodanie do siebie równych liczb daje w wyniku zero. Ponadto dodawanie różnych potęg liczby 2 jest zgodne ze zwykłym dodawaniem, bo jeśli zapiszemy te potęgi w systemie dwójkowym i podpiszemy jedna pod drugą, to dwie jedynki nigdy nie będą leżeć w jednej linii pionowej.

Korzystając z tych obserwacji dodamy 41 i 27 bez posługiwania się bezpośrednio zapisem binarnym.

$$41 \oplus 27 = (32 \oplus 8 \oplus 1) \oplus (16 \oplus 8 \oplus 2 \oplus 1) = 32 \oplus 16 \oplus 2 = 50.$$

Skorzystaliśmy tu również z przemienności i łączności działania $\oplus$.

Przejdziemy teraz do opisu strategii wygrywającej dla gry Nim. Załóżmy, że początkowym układzie przynajmniej dwa rzędy zawierają więcej niż po jednym patyczku. Załóżmy również, że suma trzech liczb reprezentujących ilości patyczków w rzędach jest różna od zera. Usuwamy pewną liczbę patyczków z któregoś rzędu tak, aby suma nowych liczb wynosiła zero. Tzn. jeśli po naszym ruchu liczby te wynoszą a, b, c, to $a \oplus b \oplus c = 0$. Zauważmy, że po naszym ruchu znowu przynajmniej dwa rzędy zawierają więcej niż po jednym patyczku. Rzeczywiście, w przeciwnym wypadku suma nie mogłaby wynosić zero. Na przykład, gdy ilości patyczków w rzędach wynoszą 1, 1, c lub 0, 1, c, gdzie $c \geqslant 2$, to $1 \oplus 1 \oplus c = c \neq 0$ lub $0 \oplus 1 \oplus c \neq 0$, bo $c \geqslant 2$.

Następny ruch należy do przeciwnika. Pokażemy później, że jego ruchu suma trzech liczb jest zawsze różna od zera. W związku z tym mamy do czynienia z podobnym układem jak na początku gry, o ile nadal przynajmniej dwa rzędy zawierają więcej niż po jednym patyczku. Naszą strategię stosujemy aż do momentu, gdy tylko jeden rząd zawiera przynajmniej dwa patyczki. W takiej sytuacji postępujemy następująco. Jeśli układ ma postać $(1,\ 1,\ c)$, gdzie $c \geqslant 0$, to po naszym ruchu pozostawiamy układ $(1,\ 1,\ 1)$. Układ $(0,\ 1,\ c)$, gdzie $c \geqslant 2$, zmieniamy na $(0,\ 1,\ 0)$. Wreszcie układ $(0,\ 0,\ c)$, w którym $c \geqslant 2$, zmieniamy na $(0,\ 0,\ 1)$. W każdej z tych sytuacji wygrywamy grę.

Aby pokazać, że nasza strategia jest poprawna musimy uzasadnić dwie rzeczy. Po pierwsze, że każdy układ $(a,\ b,\ c)$, w którym przynajmniej dwie liczby są większe niż 2 i suma jest niezerowa, potrafimy zmienić w układ o sumie równej zero. Po drugie, że gdy układ ma sumę równą zero, to po ruchu przeciwnika suma ta nie będzie równa zero.

Zapiszmy liczby a, b, c w systemie dwójkowym i podpiszmy je pod sobą, aby odpowiednie cyfry były zapisane w jednej linii pionowej. Przyjmując, że $a, b, c < 2^n$ otrzymamy

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 \end{array}$$

Jeśli suma tych liczb jest różna od zera, to pewna kolumna zawiera dwa zera i jedną jedynkę lub trzy jedynki, tzn. nieparzystą ilość jedynek. Wybierzmy pierwszą taką kolumnę od lewej strony. Przypuśćmy, że numer tej kolumny wynosi k. Możemy założyć, że jedynka występuje w pierwszym wierszu tej kolumny. W związku z tym mamy do czynienia z następującą sytuacją.

$$\begin{array}{cccccccccc} a_n & a_{n-1} & \dots & a_{k+1} & 1 & a_{k-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_{k+1} & b_k & b_{k-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_{k+1} & c_k & c_{k-1} & \dots & c_2 & c_1 & c_0 \end{array}$$

Każda kolumna na lewo od k-tej kolumny zawiera parzystą liczbę jedynek, tzn. zawiera dwie jedynki lub nie zawiera żadnej. Zmniejszamy liczbę a w następujący sposób. Zmieniamy cyfrę 1 w k-tej kolumnie na 0, a następnie modyfikujemy cyfry $a_0, a_1, \ a_2, \ldots \ , \ a_{k-1}$ tak, aby każda kolumna na prawo od k-tej kolumny zawierała parzystą liczbę jedynek. W ten sposób otrzymamy układ trzech liczb o sumie równej zero. Zauważmy, że gdy k-ta kolumna zawiera trzy jedynki, to możemy zmniejszyć w opisany wyżej sposób dowolną z trzech liczb. To oznacza, że nasz ruch wygrywający możemy wykonać wtedy na trzy różne sposoby.

Jeśli suma liczb $a, \ b, c$ jest równa zero, to każda kolumna zawiera parzystą liczbę jedynek. Jeśli zmienimy jedną z liczb $a, \ b, \ c,$ tzn. zmienimy jedną lub więcej cyfr na przykład w $a,$ to w kolumnach, gdzie nastąpiła zmiana pojawi się nieparzysta liczba jedynek. Po takiej zmianie suma nie będzie równa zero.

Zilustrujemy działanie pierwszego elementu strategii na przykładzie poniżej. Załóżmy, że w pewnym momencie gry po ruchu naszego przeciwnika napotykamy układ 25, 49 i 54. Zapisujemy liczby w systemie binarnym

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

W drugiej kolumnie od lewej strony widzimy trzy jedynki. Zmieniamy pierwszą liczbę na

$$0\ 0\ 1\ 1\ 1,$$

tzn. odejmujemy 2^4, odejmujemy 2^3, dodajemy 2^2 i dodajemy 2^1. Reasumując, zmniejszamy pierwszą liczbę o $16 + 8 - 4 - 2 = 18$. Nowy układ to 7, 49 i 54.

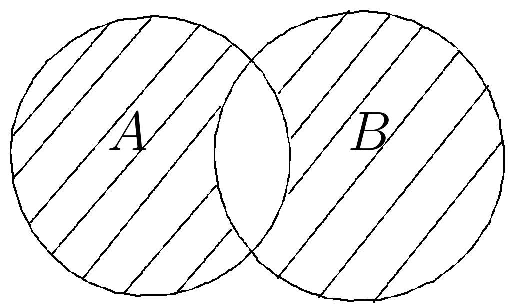
Zmieńmy zasady gry przyjmując, że gracz, który weźmie ostatni patyczek wygrywa. Podobnie jak wcześniej należy po każdym swoim ruchu pozostawić sumę liczb równą zero. Wtedy po ruchu przeciwnika suma będzie zawsze niezerowa. Zatem przeciwnik nie może wygrać. Nie trzeba więc modyfikować strategii w przypadku, gdy tylko jeden z rzędów zawiera więcej niż jeden patyczek.

Nietrudno zauważyć, że strategia opisana dla gry z trzema rzędami przenosi się na przypadek większej liczby rzędów bez zmian. Również i tu modyfikujemy tę strategię w przypadku, gdy tylko jeden z rzędów ma przynajmniej dwa patyczki. Wtedy zmniejszamy liczbę patyczków w tym rzędzie do zera lub do jeden tak, aby liczba rzędów zawierających dokładnie jeden patyczek była nieparzysta.

Ta modyfikacja nie jest potrzebna, gdy wygrywającym jest gracz, który weźmie ostatni patyczek.

Różnica symetryczna zbiorów

Dla dwu zbiorów A i B różnica symetryczna $A \triangle B$ składa się z tych elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A lub B. Element x należy do $A \triangle B$ z jednego z dwu powodów: x należy do A i nie należy do B lub odwrotnie należy do B i nie należy do A. Graficzną ilustracją różnicy symetrycznej jest zakreskowany zbiór na rysunku poniżej.



Dla uproszczenia będziemy rozważać zbiory skończone zawarte w w pewnym zbiorze nieskończonym $\Omega = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$. Każdy skończony podzbiór A zawiera pewne elementy spośród a_n. W związku z tym taki podzbiór możemy zakodować ciągiem zer i jedynek. Na przykład podzbiór $A = \{a_0, a_2, a_5\}$ ma kod 100101. Z kolei kod 110110 odpowiada zbiorowi $B = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$. Dany element a_n należy do podzbioru A jeśli na pozycji n kodu występuje cyfra 1. W przeciwnym wypadku element a_n do podzbioru A nie należy. Dysponując kodami podzbiorów A i B łatwo jest wyznaczyć kod ich różnicy symetrycznej $A \triangle B$. Traktujemy kody jako liczby zapisane w systemie dwójkowym. Kodem podzbioru $A \triangle B$ jest suma Nim kodów odpowiadających podzbiorom A i B.

Dzięki tej interpretacji uzyskujemy pewne własności różnicy symetrycznej. Na przykład dodawanie Nim jest łączne i przemienne. Zatem również różnica symetryczna ma te własności. Tzn.

$$A \triangle B = B \triangle A$$
$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

Ponadto przy większej liczbie podzbiorów łatwo jest opisać ich różnicę symetryczną. Zbiór

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$$

składa się z elementów, które należą do nieparzystej liczby podzbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Rzeczywiście, jeśli zapiszemy kody tych podzbiorów jeden pod drugim i obliczymy sumę Nim, to w danej kolumnie o numerze k suma wyniesie 1, jeśli w tej kolumnie występuje nieparzysta liczba jedynek lub suma ta wyniesie 0, jeśli w tej kolumnie występuje parzysta liczba jedynek.

Gra Wythoffa

W 1907 Wythoff rozważał grę w patyczki ułożone w dwu rzędach podobną do gry Nim, z dodatkowym ruchem, który polega na możliwości usunięcia tej samej liczb patyczków z obu rzędów jednocześnie. Jeśli gracz, który jest zmuszony zabrać ostatni patyczek przegrywa, strategia wygrywająca jest taka sama jak dla gry Nim.

Jednakże, jeśli wygrywającym jest gracz, który bierze ostatni patyczek, opis strategii wygrywającącej jest znacznie trudniejszy. Układ liczb (c, d) nazwiemy wygrywającym, jeśli niezależnie od posunięcia przeciwnika wygrywamy grę, przy odpowiednio dobranej strategii. Wythoff pokazał, że układy wygrywające to

$$(1,2),\ (3,5),\ (4,7),\ (6,10),\ (8,13),\ \ldots .$$

Układy wygrywające mają postać (c_n, d_n), gdzie $d_n = c_n + n$ oraz c_n jest najmniejszą liczbą naturalną, która nie wystąpiła wcześniej jako c_k lub d_k dla $k < n$. Strategia wygrywająca polega na pozostawieniu po swoim posunięciu układu postaci (c_n, d_n) dla jakiejś wartości n.

Aby udowodnić, że strategia ta jest poprawna wyprowadzimy kilka pomocnych własności liczb c_n i d_n.

1. Liczby c_n i c_n różnią się o 1 lub o 2.
   Przyjmijmy, że $c_{n+1} \geqslant c_n + 3$. To oznacza, że liczby $c_n + 1$ oraz $c_n + 2$ wystąpiły wcześniej jako d_k i d_l, dla $k < l$. Stąd
   $$c_n + 1 = c_k + k, \qquad c_n + 2 = c_l + l.$$
   Odejmując te równości stronami otrzymujemy sprzeczność
   $$0 < c_l - c_k = k + 1 - l \leqslant 0.$$

2. Zbiory złożone z liczb c_n i d_n są rozłączne.
   Rzeczywiście, załóżmy, że $c_k = d_l = c_l + l$.

Wtedy $l < k$. Ale z definicji liczba c_k jest różna od d_l.

3. Każda liczba naturalna ma postać c_n lub d_n. To wynika wprost z definicji liczb c_n.

Oznaczmy rodzinę układów (c_n, d_n) symbolem W. Pokażemy teraz, że przy konfiguracji (c_n, d_n), po każdym posunięciu nowa konfiguracja nie należy do W. Jeśli posunięcie polega na zmniejszeniu tylko jednej z liczb o na przykład a, to otrzymane układy $(c_n - a, d_n)$ i $(c_n, d_n - a)$ nie należą do W, dzięki własnościom 2. i 3. Z kolei, gdy zmniejszymy obie liczby o a, to ich różnica pozostanie równa n. Ale układ (c_n, d_n) jest jedyną konfiguracją w W, w którym różnica wynosi właśnie n.

Udowodnimy teraz, że każdy układ (x, y) nie należący do W, można jednym posunięciem zmienić w układ należący do W lub wygrać grę jednym posunięciem. Z własności 2. i 3. nasz układ może mieć jedną z podanych niżej postaci.

(a) $(c_k, d_l), \quad k < l.$

(b) $(c_k, d_l), \quad k > l.$

(c) $(d_k, d_l), \quad k \leqslant l.$

(d) $(c_k, c_l), \quad k < l,\ c_l > d_k.$

(e) $(c_k, c_k).$

(f) $(c_k, c_l), \quad k < l,\ c_l < d_k.$

W pięciu pierwszych przypadkach zmieniamy układ następująco.

(a) $(c_k, d_k).$

(b) $(c_l, d_l).$

(c) $(d_k, c_k).$

(d) $(c_k, d_k).$

(e) $(0, 0).$

W przypadku (f) przyjmujemy $i = c_l - c_k$. Wtedy $i < d_k - c_k = k$. Zmieniamy zatem układ na (c_i, d_i) poprzez usunięcie $c_k - c_i$ patyczków z każdego rzędu.

Wythoff zauważył, że liczby c_n i d_n wyrażają się wzorami

$$c_n = \lfloor nt \rfloor, \quad d_n = \lfloor nt^2], \qquad \text{gdzie } t = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

i symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x.

Aby uzasadnić te wzory wykażemy najpierw, że $\lfloor nt \rfloor \neq \lfloor mt^2 \rfloor$ dla dowolnych liczb naturalnych n i m. Ponieważ liczba t jest niewymierna zatem $nt \neq mt^2$. Załóżmy, że $nt < mt^2$. Wtedy $n < mt$ oraz $nt^{-1} < m$. Zatem $n \leqslant \lfloor mt \rfloor$ i $\lfloor nt^{-1} \rfloor < m$. Dodajmy do pierwszej nierówności m a do drugiej n. Wtedy korzystając z tego, że $1 + t = t^2$ oraz $1 + t^{-1} = t$ otrzymamy

$$\begin{aligned} n+m \ &\leqslant\ m + \lfloor mt \rfloor = \lfloor m(1+t) \rfloor = \lfloor mt^2 \rfloor, \\ n+m \ &>\ n + \lfloor nt^{-1} \rfloor = \lfloor n(1+t^{-1}) \rfloor = \lfloor nt \rfloor. \end{aligned}$$

Zatem

$$\lfloor nt \rfloor < n + m \leqslant \lfloor mt^2 \rfloor.$$

Podobnie dowodzimy, że jeśli $mt^2 < nt$, to

$$\lfloor mt^2 \rfloor < n + m \leqslant \lfloor nt \rfloor.$$

Pokażemy teraz, że każda liczba naturalna ma postać $e_n = \lfloor nt \rfloor$ lub $f_n = \lfloor nt^2 \rfloor$ dla pewnej wartości n. Ciągi e_n oraz f_n są rosnące, bo $t > 1$. Ponadto $f_n = e_n + n$. Rozważmy zbiór liczb naturalnych nie większych niż $\lfloor mt^2 \rfloor$. Obliczymy ile liczb postaci e_n i f_n znajduje się w tym zbiorze. Mamy tam m liczb postaci f_n. Aby stwierdzić ile jest liczb postaci e_n trzeba rozwiązać nierówność

$$\lfloor nt \rfloor \leqslant \lfloor mt^2 \rfloor.$$

Ponieważ liczby te nie mogą być równe nierówność ta jest równoważna warunkowi

$$nt < mt^2, \qquad \text{czyli} \;\; n \leqslant \lfloor mt \rfloor.$$

W związku z tym w naszym zbiorze mamy

$$m + \lfloor mt \rfloor = \lfloor mt^2 \rfloor$$

liczb postaci e_n lub f_n. Ponieważ liczby te są różne oraz wszystkich liczb w naszym zbiorze jest $\lfloor mt^2 \rfloor$, to znaczy, że każda liczba naturalna w tym zbiorze ma postać e_n lub f_n.

Z własności, które zostały wykazane powyżej wynika, że $e_n = c_n$ oraz $f_n = d_n$.