Zagadnienie transportowe

Firma produkująca papier kserograficzny posiada 4 wytwórnie i 5 hurtowni, do których dostarczany jest papier. Każda z fabryk wytwarza określoną liczbę ton papieru na miesiąc, i każda z hurtowni wykazuje określone miesięczne zapotrzebowanie na papier. Liczby te podane są w dwu tabelach poniżej.

Fabryka	Produkcja (w tonach)
1	200
2	280
3	300
4	150

Hurtownia	Zapotrzebowanie (w tonach)
1	100
2	160
3	350
4	100
5	220

Zauważmy, że całkowita produkcja wynosi 930 ton i jest równa całkowitemu zapotrzebowaniu. Dyrektor sprzedaży firmy jest odpowiedzialny za zaplanowanie dostaw z fabryk do hurtowni tak, aby koszt transportu był jak najmniejszy. W tym celu dyrektor ustalił koszt w złotych dostarczenia jednej tony papieru z danej fabryki do danej hurtowni. Te dane umieścił w tabeli poniżej.

	h1	h2	h3	h4	h5
f1	100	120	80	150	100
f2	120	90	180	130	130
f3	100	100	120	200	120
f4	150	120	160	120	80

Spróbujemy zestawić wszystkie posiadane dane w jednej tabeli, aby ułatwić dyrektorowi planowanie. Dla prostoty zapisu podaż i popyt podane są w dziesiątkach ton, a koszty w setkach złotych. Poszczególne wiersze odpowiadają fabrykom a kolumny hurtowniom.

10	12	8	15	10	20
12	9	18	13	13	28
10	10	12	20	12	30
15	12	16	12	8	15
10	16	35	10	22	

Dyrektor zaplanował transport papieru z fabryk do hurtowni według następującego schematu.

$\boxed{10}$ 5	$\boxed{12}$ 0	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{15}$ 0	$\boxed{10}$ 5	20
$\boxed{12}$ 0	$\boxed{9}$ 6	$\boxed{18}$ 0	$\boxed{13}$ 10	$\boxed{13}$ 12	28
$\boxed{10}$ 5	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{12}$ 15	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{12}$ 0	30
$\boxed{15}$ 0	$\boxed{12}$ 0	$\boxed{16}$ 10	$\boxed{12}$ 0	$\boxed{8}$ 5	15
10	16	35	10	22	

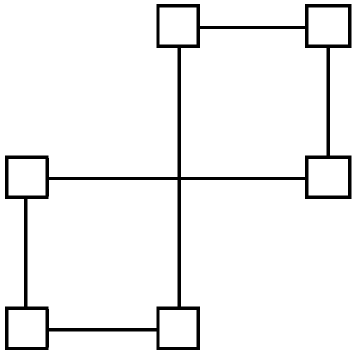
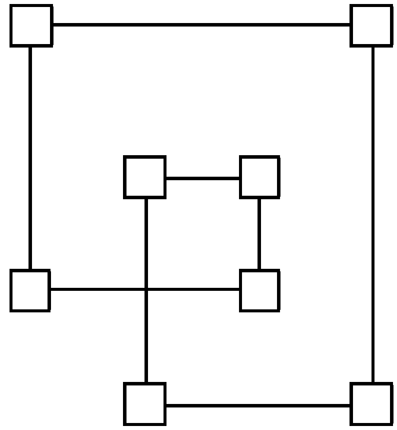
Liczby w komórkach oznaczają ilość towaru, jaką planuje się przesłać od danej fabryki do danej hurtowni. Np. dostawa z fabryki *f*3 do hurtowni *h*2 wyniesie 10. Suma liczb w pierwszym wierszu oznacza ilość towaru wyekspediowanego z fabryki *f*1. Dlatego ta suma jest równa 20. Z kolei suma liczb w pierwszej kolumnie oznacza ilość towaru wysłanego do hurtowni *h*1. Stąd ta suma musi być równa 10. To samo dotyczy pozostałych wierszy i kolumn.

Czy ten plan dostaw jest optymalny ? Koszt dostaw przy podanym planie wynosi 105 000 zł. Czy istnieje inny plan dostaw, przy którym koszt jest mniejszy ?

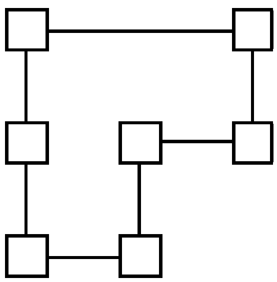
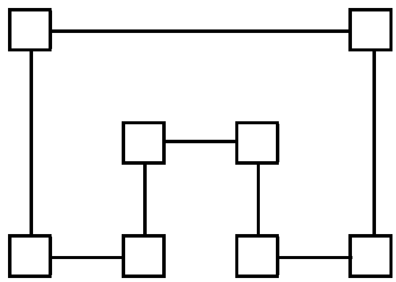
Rozważmy komórki zaznaczone w tabeli poprzez wzięcie w ramkę liczb dostawy.

10 / $\boxed{5}$	12 / 0	8 / 10	15 / 0	10 / $\boxed{5}$	20
12 / 0	9 / 6	18 / 0	13 / 10	13 / 12	28
10 / $\boxed{5}$	10 / 10	12 / $\boxed{15}$	20 / 0	12 / 0	30
15 / 0	12 / 0	16 / $\boxed{10}$	12 / 0	8 / $\boxed{5}$	15
10	16	35	10	22	

Układ komórek zaznaczonych w tabeli ramką tworzy cykl. Na rysunkach poniżej mamy inne przykłady cykli.

Z kolei konfiguracje na następnych rysunkach nie są cyklami, bo w jednej linii znajdują się więcej niż dwie komórki.

Zmodyfikujemy plan dostaw w komórkach cyklu w sposób opisany w następnej tabeli.

10 $+5$ $\boxed{5}$	12 0	8 10	15 0	10 -5 $\boxed{5}$	20
12 0	9 6	18 0	13 10	13 12	28
10 -5 $\boxed{5}$	10 10	12 $+5$ $\boxed{15}$	20 0	12 0	30
15 0	12 0	16 -5 $\boxed{10}$	12 0	8 $+5$ $\boxed{5}$	15
10	16	35	10	22	

Zanim napiszemy nowy plan dostaw sprawdźmy, czy ten plan jest lepszy od poprzedniego. Obliczmy zmianę kosztu dostaw papieru. Ta zmiana wynosi

$$5\times10 + (-5)\times10 + 5\times12 + (-5)\times16 + 5\times8 + (-5)\times10 = 5\times(10 - 10 + 12 - 16 + 8 - 10) = 5\times(-6) = -30$$

Tzn., że przy takiej modyfikacji planu dostaw koszt zmaleje o 3 000 zł. Gdybyśmy dokonali odwrotnego przesunięcia towaru, tzn. tam, gdzie dodawaliśmy 5 jednostek odejmowalibyśmy 5 jednostek, a tam, gdzie odejmowaliśmy 5 dodawalibyśmy 5, to koszt wzrósłby o 3 000 zł.

Pokazaliśmy na przykładzie, że gdy w planie dostaw, znajdziemy ciąg komórek, z dodatnimi dostawami, tworzących cykl, to istnieje plan dostaw o koszcie mniejszym lub równym, w którym ten cykl nie występuje (bo po zmianie w jednej z komórek cyklu dostawa będzie równa zero). Zatem każdy plan dostaw można tak zmodyfikować, aby w nowym planie nie było cyklu komórek z dodatnimi dostawami, i aby koszt nowego planu był niewiększy od kosztu początkowego. Aby to wykonać przesuwamy jednostkę towaru wokół cyklu i sprawdzamy, czy koszt się zmniejszy, zwiększy czy też pozostanie bez zmian. Jeśli się zwiększy, to dokonujemy zmiany przeciwnej. Następnie przesuwamy maksymalną możliwą ilość towaru. W ten sposób cykl zostanie wyeliminowany.

Wiadomo, że jeśli zaplanujemy dodatnie dostawy w wielu komórkach, to szansa powstania cyklu jest duża. Można udowodnić (zadanie), że jeśli plan dostaw nie posiada cyklu, to liczba komórek z dodatnimi dostawami może wynosić maksymalnie 8, w przypadku 4 dostawców i 5 odbiorców.

Spróbujemy znaleźć taki plan bez cyklu. Po modyfikacji wykonanej wcześniej nowy plan dostaw ma postać

10 / 10	12	8 / 10	15	10	20
12	9 / $\boxed{6}$	18	13 / 10	13 / $\boxed{12}$	28
10	10 / $\boxed{10}$	12 / $\boxed{20}$	20	12	30
15	12	16 / $\boxed{5}$	12	8 / $\boxed{10}$	15
10	16	35	10	22	

Można znaleźć jeszcze jeden cykl. Usuwamy ten cykl metodą opisaną powyżej i otrzymujemy następny plan dostaw tańszy o dalsze 50 razy 100 zł.

10	12	8	15	10	
10		10			20
12	9	18	13	13	
	11		10	7	28
10	10	12	20	12	
	5	25			30
15	12	16	12	8	
				15	15
10	16	35	10	22	

Aktualny plan nie posiada już cyklu komórek z dodatnimi dostawami i jest tańszy od planu dyrektora o 4 000 zł. Czy ten plan jest już optymalny ? Aby to zbadać sprawdzamy, czy nie będzie opłacalne zaplanowanie dodatniej dostawy w jakiejś komórce, w której dostawa na obecnym etapie wynosi zero.

Rozważmy komórkę zaznaczoną w tabeli poniżej.

10 10	12 	8 10	15 	10 	20
12 $\boxed{}$	9 11	18 	13 10	13 7	28
10 	10 5	12 25	20 	12 	30
15 	12 	16 	12 	8 15	15
10	16	35	10	22	

Komórka ta tworzy cykl z pewnymi komórkami, o dodatniej dostawie.

10 −10 $\boxed{10}$	12	8 +10 $\boxed{10}$	15	10	20
12 +10 $\boxed{}$	9 −10 $\boxed{11}$	18	13 10	13 7	28
10	10 +10 $\boxed{5}$	12 −10 $\boxed{25}$	20	12	30
15	12	16	12	8 15	15
10	16	35	10	22	

Przesuńmy 10 jednostek towaru do tej wybranej komórki. Wtedy, aby zachować niezmieniony popyt i podaż w wierszach i kolumnach, musimy na przemian dodawać i odejmować 10 jednostek w kolejnych komórkach cyklu. Zmiana kosztu wyniesie zatem 100 zł razy

$10\times(12 - 9 + 10 - 12 + 8 - 10) = -10.$

Tzn. dalsza modyfikacja planu jest korzystna. Podobną analizę należałoby przeprowadzić dla każdej komórki w tabeli, w której wielkość dostawy wynosi aktualnie zero. Mogłoby to być dość uciążliwe. Byłoby pożądane, aby taką analizę wykonać jednocześnie dla wszystkich komórek.

W tym celu przeprowadzimy pewne teoretyczne przygotowanie. Zmodyfikujmy tabelę kosztów w następujący sposób. Do pierwszego wiersza dodajmy stałą liczbę c, która może być ujemna lub dodatnia. Można sobie wyobrazić, że taka zmiana została spowodowana przez nieoczekiwane wprowadzenie opłaty w wysokości c od każdej jednostki towaru, pobieranej przy bramie wyjazdowej w fabryce 1, o ile liczba c jest dodatnia lub przez wprowadzenie premii w wysokości c dla każdej jednostki towaru, o ile $c < 0$. Zauważmy, że jeśli znajdziemy optymalny plan dostaw przed wprowadzeniem tej dodatkowej opłaty, to plan ten nadal będzie optymalny w warunkach, gdy ta opłata obowiązuje. Wynika to z faktu, że niezależnie od warunków, musimy wyekspediować 20 jednostek towaru z fabryki 1.

Podobną modyfikację możemy przeprowadzić dla każdego z pozostałych wierszy, jak również dla kolumn tabeli kosztów.

Reasumując, jeśli tabela kosztów zostanie zmodyfikowana poprzez dodanie do wierszy i kolumn pewnych stałych, niekoniecznie równych sobie, to optymalny plan dla oryginalnej tabeli kosztów będzie również optymalny dla nowej zmodyfikowanej tabeli kosztów, i odwrotnie. Ta uwaga pozwala nam zmieniać tabelę kosztów w sposób opisany powyżej. Takich możliwości jest bardzo wiele. Którą z nich wybierzemy ?

Spróbujmy tak zmodyfikować tabelę kosztów, aby w komórkach o dodatniej dostawie, nowy koszt wynosił zero. Kolejne modyfikacje pokazane są w tabelach poniżej.

-10	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{15}$	$\boxed{10}$	20
	$\boxed{12}$	$\boxed{9}$ 11	$\boxed{18}$	$\boxed{13}$ 10	$\boxed{13}$ 7	28
	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$ 5	$\boxed{12}$ 25	$\boxed{20}$	$\boxed{12}$	30
	$\boxed{15}$	$\boxed{12}$	$\boxed{16}$	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$ 15	15
	10	16	35	10	22	

			$+2$			
-10	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$ 10	$\boxed{15}$	$\boxed{10}$	20
	$\boxed{12}$	$\boxed{9}$ 11	$\boxed{18}$	$\boxed{13}$ 10	$\boxed{13}$ 7	28
	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$ 5	$\boxed{12}$ 25	$\boxed{20}$	$\boxed{12}$	30
	$\boxed{15}$	$\boxed{12}$	$\boxed{16}$	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$ 15	15
	10	16	35	10	22	

			+2			
−10	10 10	12	8 10	15	10	20
	12	9 11	18	13 10	13 7	28
−14	10	10 5	12 25	20	12	30
	15	12	16	12	8 15	15
	10	16	35	10	22	

Ostatecznie otrzymujemy

		+4	+2			
−10	10 10	12	8 10	15	10	20
−13	12	9 11	18	13 10	13 7	28
−14	10	10 5	12 25	20	12	30
−8	15	12	16	12	8 15	15
	10	16	35	10	22	

Nowa tabela kosztów ma zatem postać

$\boxed{0}$ 10	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	20
$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$ 11	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{0}$ 7	28
$\boxed{-4}$	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{0}$ 25	$\boxed{6}$	$\boxed{-2}$	30
$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 15	15
10	16	35	10	22	

Plan dostaw względem nowej tabeli kosztów jest optymalny dokładnie wtedy, gdy jest optymalny względem początkowej tabeli kosztów. Możemy więc zapomnieć o początkowej tabeli kosztów i zająć się nową tabelą.

Zauważmy, że względem nowej tabeli koszt dostaw wynosi 0, bo w komórkach, gdzie zaplanowano dodatnią dostawę, koszt wynosi właśnie 0. Widzimy też, że w kilku komórkach nowy koszt dostawy jest ujemny. Wybierzmy komórkę z najbardziej ujemnym kosztem. Komórka ta tworzy cykl z komórkami o dodatniej dostawie.

0	-10	$\boxed{10}$	6	0	$+10$	$\boxed{10}$	5	0	20
-1	0	11	7	0	10	0	7	28
-4	$+10$	$\boxed{}$	0	5	0	-10	$\boxed{25}$	6	-2	30
7	8	10	4	0	15	15
10	16	35	10	22	

Przesuńmy 10 jednostek towaru wokół tego cyklu. Otrzymamy w ten sposób nowy plan dostaw, tańszy o 40 razy 100 zł.

0	6	0	20	5	0	20
-1	0	11	7	0	10	0	7	28
-4	10	0	5	0	15	6	-2	30
7	8	10	4	0	15	15
10	16	35	10	22	

Tak jak poprzednio zmodyfikujmy znowu tabelę kosztów tak, aby w komórkach z dodatnią dostawą koszt wynosił 0. W tym celu do pierwszej kolumny dodajemy liczbę 4. Otrzymamy nową tabelę kosztów.

4	6	0 / 20	5	0	20
3	0 / $\boxed{11}$	7	0 / 10	0 / $\boxed{7}$	28
0 / 10	0 / $\boxed{5}$	0 / 15	6	-2 / $\boxed{\ }$	30
11	8	10	4	0 / 15	15
10	16	35	10	22	

Została jeszcze jedna komórka, w której koszt jest liczbą ujemną. Przesuwając 5 jednostek towaru otrzymamy następny plan dostaw tańszy o dalsze 10 razy 100 zł.

$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$ 20	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	20
$\boxed{3}$	$\boxed{0}$ 16	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{0}$ 2	28
$\boxed{0}$ 10	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{6}$	$\boxed{-2}$ 5	30
$\boxed{11}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 15	15
10	16	35	10	22	

Modyfikujemy tabelę, aby wyzerować koszty w komórkach o dodatniej dostawie.

	-2		-2			
$+2$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{0}$ 20	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	20
	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$ 16	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{0}$ 2	28
$+2$	$\boxed{0}$ 10	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{6}$	$\boxed{-2}$ 5	30
	$\boxed{11}$	$\boxed{8}$	$\boxed{10}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$ 15	15
	10	16	35	10	22	

Ostatecznie otrzymujemy

4	8	0 (20)	7	2	20
1	0 (16)	5	0 (10)	0 (2)	28
0 (10)	2	0 (15)	8	0 (5)	30
9	8	8	4	0 (15)	15
10	16	35	10	22	

Koszt naszego planu dostaw względem tej tabeli wynosi 0. W każdej komórce koszt jest teraz nieujemny. To oznacza, że każdy inny plan dostaw ma koszt nieujemny. Zatem nasz plan jest już optymalny. Plan ten jest jednocześnie optymalny względem początkowej tabeli kosztów. Zsumowanie wszystkich oszczędności powstałych w wyniku usunięcia cykli i wykonaniu dwu dalszych modyfikacji daje 13 000 zł. Tzn. koszt planu optymalnego wynosi 92 000 zł.

Procedura optymalnego planowania dostaw

1. Znaleźć początkowy plan dostaw, nie zawierający cyklu.
2. Wyzerować koszty w komórkach o dodatnich dostawach, poprzez dodanie odpowiednich liczb do wierszy i kolumn tabeli kosztów.
3. Jeśli wszystkie nowe koszty są nieujemne, to plan jest optymalny.
4. Jeśli istnieją koszty ujemne, to wybieramy komórkę z najbardziej ujemnym kosztem.
5. Znajdujemy cykl złożony z tej komórki i z komórek o dodatniej dostawie.
6. Przesuwamy towar wokół cyklu tak, aby dostawa w nowej komórce była jak największa. Wtedy w jednej z komórek cyklu dostawa zmniejszy się do zera.
7. Wracamy do 2.

Ta procedura jest nazywana *metodą sympleks.*

Jak znaleźć początkowy plan dostaw, bez cyklu ? Najprostsza metoda pochodzi od Dantziga. Zaczynamy od komórki w lewym górnym rogu tabeli. Planujemy maksymalną możliwą dostawę w tej komórce. Następnie przesuwamy się do komórki na prawo lub w dół, w zależności od tego, w której linii pozostała do wykorzystania jakaś podaż lub popyt. Postępując tak dalej otrzymamy plan dostaw nie zawierający cyklu.

10 10	12 10	8	15	10	20
12	9 6	18 22	13	13	28
10	10	12 13	20 10	12 7	30
15	12	16	12	8 15	15
10	16	35	10	22	

Koszt tego planu wynosi 123 000 zł, więc jest gorszy od planu dyrektora. Wynika to stąd, że metoda wyboru nie bierze pod uwagę wartości kosztów dostaw w poszczególnych komórkach.

Są inne metody wyboru planu początkowego, nie zawierającego cyklu, w których koszty dostaw odgrywają rolę. Najbardziej popularna nosi nazwę metody Vogla. Mając początkowy plan możemy przystąpić do stosowania opisanego wcześniej algorytmu. Ilość iteracji algorytmu zależy istotnie od wyboru planu początkowego. Im lepszy jest ten plan, tym mniej iteracji prowadzi do planu optymalnego. Dlatego warto więcej wysiłku włożyć w wyznaczenie dobrego planu początkowego, aby zaoszczędzić na ilości iteracji metody sympleks.

Modelowanie

Zagadnienie transportowe może być rozwiązywane przy użyciu komputerów. Jednakże wiele zagadnień optymalizacyjnych ma dodatkowe ograniczenia, które wymagają opracowania modelu zanim będzie można zastosować procedurę opisaną wcześniej. Tę czynność musi wykonać człowiek.

1. Podaż przekracza popyt.

W typowych zagadnieniach popyt nie jest równy podaży. Wyobraźmy sobie, że sieć sklepów z telewizorami zaopatruje się w 4 hurtowniach. Sieć posiada 4 duże punkty sprzedaży na terenie Dolnego Śląska. Zapotrzebowanie miesięczne dotyczące telewizora „ABC", podaż miesięczna oraz koszt dostarczenia telewizora z danej hurtowni do danego sklepu podane są w tabeli.

10	15	20	15	30
20	30	15	20	50
10	15	15	25	20
20	20	10	15	40
25	15	25	35	

Całkowity popyt wynosi 100 sztuk miesięcznie a całkowita podaż wynosi 140 sztuk. Chcemy zaplanować plan dostaw tak, aby koszt był jak najmniejszy i popyt każdego sklepu został zaspokojony. Oczywiście 40 telewizorów pozostanie w magazynach i będzie można je sprzedać innym odbiorcom.

Wprowadzamy fikcyjny sklep „widmo”, którego popyt ustalamy na 40. Liczba ta jest równa nadwyżce podaży nad popytem. Przyjmujemy, że koszt dostarczenia telewizora do tego sklepu z dowolnej hurtowni wynosi 0, bo to oznacza, że telewizor pozostaje w magazynie w tejże hurtowni i nie jest nigdzie transportowany. W tym modelu ignorujemy koszty magazynowania. W ten sposób otrzymujemy nową tabelę zagadnienia transportowego, w którym podaż i popyt są już zrównoważone.

10	15	20	15	0	30
20	30	15	20	0	50
10	15	15	25	0	40
20	20	10	15	0	20
25	15	25	35	40	

2. Metoda dużej stałej.

Rozważmy sieć 4 sklepów AGD zaopatrujących się w 4 hurtowniach w pralki określonego typu. Ze względu na długotrwały remont mostu nie można dostarczyć towaru z hurtowni *h*3 do sklepu *s*2. Tabela kosztów ma następującą postać.

15	10	12	8	30
10	10	12	14	10
15	—	10	13	20
9	10	13	14	40
25	20	21	34	

Chcemy zaplanować dostawy tak, aby koszt był jak najmniejszy, przy założeniu, że pralki nie są dostarczane z hurtowni $h3$ do sklepu $s2$. Niech M oznacza dużą stałą, tzn. liczbę w zamyśle większą od dowolnej innej liczby. Rozważamy następującą tabelę kosztów.

15	10	12	8	30
10	10	12	14	10
15	M	10	13	20
9	10	13	14	40
25	20	21	34	

Do tej tabeli stosujemy metodę sympleks, która doprowadzi nas do rozwiązania optymalnego. W rozwiązaniu optymalnym dostawa z hurtowni $h3$ do sklepu $s2$ musi być równa zero, bo inaczej koszt dostawy będzie niemniejszy niż M, czyli większy niż koszt dowolnego planu, w którym dostawa od $h3$ do $s2$ wynosi 0.

3. Wszystkie komplikacje jednocześnie.

Następny przykład pochodzi z podręcznika F. S. Hilliera i G. I. Liebermana, *Introduction to Operations Research,* wydanie VII, 2001.

Cztery miasteczka w Stanach Zjednoczonych, Berdoo, Los Devils, San Go i Hollyglass są zaopatrywane w wodę przez agencję Metro Water District. Woda pochodzi z rzek Colombo, Sacron i Calorie, przy czym nie można dostarczyć wody z Calorie do Hollyglas. Podaż i popyt podane są w milionach akrów razy stopa a koszty w dziesiątkach dolarów na akr razy stopa. Berdoo zamawia 50 jednostek wody, przy czym minimalne zapotrzebowanie wynosi 30. Z kolei zapotrzebowanie Los Devils wynosi 70. San Go zamawia 30 jednostek, ale równie dobrze może zaopatrywać się w innej agencji, zatem minimalne zapotrzebowanie wynosi 0. Wreszcie Hollyglass musi otrzymać 10 jednostek, ale przyjmie dowolną ilość wody, jaka będzie dostępna.

W tabeli poniżej podane są koszty dostarczenia wody oraz liczby podaży i popytu.

	B	LD	SG	H	Podaż
Colombo	16	13	22	17	50
Sacron	14	13	19	15	60
Calorie	19	20	23	—	50
Min.	30	70	0	10	
Max.	50	70	30	∞	

Trzeba zaplanować dostawy wody tak, aby zaspokoić minimalne zapotrzebowanie, w miarę możliwości zaspokoić maksymalne zapotrzebowanie oraz, aby koszt był możliwie najmniejszy.

Zauważmy, że spragnione wody Hollyglass może w najlepszym wypadku otrzymać 60 jednostek wody. Stąd możemy naszą tabelę zmienić na

	B	LD	SG	H	Podaż
Colombo	16	13	22	17	50
Sacron	14	13	19	15	60
Calorie	19	20	23	—	50
Min.	30	70	0	10	
Max.	50	70	30	60	

Maksymalne zapotrzebowanie wynosi 210 i przekracza o 50 całkowitą podaż. Wprowadzamy rzekę Widmo, która może dostarczyć brakujące 50 jednostek. Jednakże minimalne zapotrzebowanie musi być zaspokojone z rzeczywistych rzek.

Dzielimy miasteczko Berdoo na Berdoo Podstawowe, z zapotrzebowaniem 30 i Berdoo Dodatkowe z zapotrzebowaniem 20. Zauważmy, że jeśli zaspokoimy nawet maksymalne zapotrzebowanie miasteczek Berdoo, Los Devils i San Go, to Hollyglass otrzyma 10 jednostek wody z rzeczywistych rzek. Dlatego nie musimy rozdzielać Hollyglass na dwa miasteczka. Ostatecznie tabela kosztów, popytów i podaży ma następującą postać.

	B(P)	B(D)	LD	SG	H	Podaż
Colombo	16	16	13	22	17	50
Sacron	14	14	13	19	15	60
Calorie	19	19	20	23	M	50
Widmo	M	0	M	0	0	50
Popyt	30	20	70	30	60	

Przypadek zdegenerowany

Przy zastosowaniu procedury znajdowania optymalnego rozwiązania zagadnienia transportowego może się zdarzyć, że

1. początkowe rozwiązanie ma mniej niż 8 komórek z dodatnimi dostawami,

2. przy pewnej iteracji metody otrzymamy rozwiązanie mające mniej niż 8 komórek z dodatnimi dostawami.

W przypadku 1 do komórek z dodatnimi dostawami dołączamy komórki z dostawami zerowymi tak, aby otrzymać 8 komórek, ale bez cyklu. Dalej postępujemy tak jak w procedurze. W przypadku 2, gdy przy przesuwaniu towaru wokół cyklu dostawa w dwu lub więcej komórkach wyzeruje się, to usuwamy tylko jedną taką komórkę i do zbioru komórek dołączamy, tę w której koszt był ujemny. Przy iteracjach może się zdarzyć, że nie możemy przesunąć dodatniej ilości towaru wokół cyklu, tzn. koszt nie zmieni się.

Zagadnienie transportowe zostało sformułowane przez F. L. Hitchcocka w 1941 a rozwiązane przez G. B. Dantziga w 1951.

Metodę rozwiązania zagadnienia nadal się stosuje z powodzeniem. Na przykład w latach 90-tych firma Procter and Gamble przebudowała system wytwarzania i dystrybucji swoich produktów w Stanach Zjednoczonych w oparciu o zagadnienie transportowe. Roczną oszczędność szacuje się na 200 mln dolarów.