1.

$$\int_b^{2\pi+b} f(x)\,dx = \int_b^{2\pi} f(x)\,dx + \int_{2\pi}^{2\pi+b} f(x)\,dx$$
$$= \int_b^{2\pi} f(x)\,dx + \int_0^{b} f(x+2\pi)\,dx = \int_b^{2\pi} f(x)\,dx + \int_0^{b} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

2. Rozważamy funkcję
$$f(A) = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx$$
Funkcja $\sin x$ jest dodatnia na przedziałach $(2n\pi, 2n\pi+\pi)$ i ujemna na $(2n\pi+\pi, 2n\pi+2\pi)$, dla $n \geqslant 0$. Zatem $f(A)$ przyjmuje lokalne maksima w punktach $(2n+1)\pi$ oraz lokalne minima w $(2n+2)\pi$. Niech
$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+k\pi}\,dx$$
Ciąg a_k jest ściśle malejący. Mamy
$$f((2n+2)\pi) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = (a_0 - a_1) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}) > 0$$
Stąd wynika, że funkcja $f(A)$ jest dodatnia. Dalej
$$f((2n+1)\pi) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = a_0 - (a_1 - a_2) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leqslant a_0$$
Zatem maksymalna wartość wynosi $a_0 = f(\pi)$.

3.

$$d_n := \int_0^{2\pi} |D_n(x)|\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{|\sin[(n+1/2)x]|}{\sin(x/2)}\,dx$$
$$= \int_0^{2\pi} |\sin[(n+1/2)x]| \left[\frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{1}{(x/2)}\right] dx + \int_0^{2\pi} \frac{|\sin[(n+1/2)x]|}{(x/2)}\,dx$$

Ciąg

$$a_n := \int\limits_0^{2\pi} |\sin[(n+1/2)x]| \left[\frac{1}{\sin(x/2)} - \frac{1}{(x/2)}\right] dx$$

jest ograniczony, bo funkcja $(t - \sin t)/(t \sin t)$ jest ciagła na $(0, 2\pi]$ i jej granica w 0 wynosi 0. Dalej stosujemy podstawienie $u = (n+1/2)x$ i otrzymujemy

$$b_n := \int\limits_0^{2\pi} \frac{|\sin[(n+1/2)x]|}{(x/2)} dx = 2 \int\limits_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du = 2 \sum_{k=0}^{2n} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{2n} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + k\pi} du = 2 \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du + 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{u_k + k\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin u \, du$$

$$= 2 \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du + 4 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{u_k + k\pi} = 2 \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 4 \sum_{k=1}^{2n} \frac{u_k}{k\pi(u_k + k\pi)}$$

Wiadomo, że ciąg

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \log(2n)$$

jest zbieżny. Reasumujac

$$d_n = b_n + a_n = \frac{4}{\pi} \log n + c_n$$

gdzie ciąg c_n jest ograniczony.