Wyjaśnienie do zadania 2.1, przykład 7.

$$f(x) = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n > 0$$

Łatwo obliczyć, że jedynym punktem krytycznym jest $x_0 = (q, q^2, \dots, q^n)$ dla $q = 2^{1/(n+1)}$. Mamy $f(x_0) = (n+1)q$. Załóżmy, że można dobrać stałe $a < b$ (w zamyśle a mała, a b duża) tak, że $x_0 \in (a,b)^n$ (iloczyn kartezjański) oraz $f(x) > f(x_0)$ dla wszystkich x z brzegu zbioru $[a,b]^n$. Wtedy funkcja f po ograniczeniu do $[a,b]^n$ przyjmuje wartość najmniejszą w pewnym punkcie, który musi leży w $(a,b)^n$, bo nie może leżeć na brzegu. Zatem musi to być punkt krytyczny. Ponieważ jest tylko jeden taki punkt, to f przyjmuje wartość najmniejszą w x_0.

Przejdziemy do doboru a i b. Oznaczmy dla uproszczenia $c = f(x_0)$. Załóżmy, że każdy z ilorazów x_{j+1}/x_j jest mniejszy niż c (umawiamy się, że $x_0 = 1,\ x_{n+1} = 2$). Wtedy ponieważ $c > 1$, to

$$x_i = \frac{x_i}{x_{i-1}} \dots \frac{x_1}{x_0} < c^i \leqslant c^n.$$

Podobnie

$$x_i = 2\frac{x_i}{x_{i+1}} \dots \frac{x_n}{x_{n+1}} > 2c^{i-n-1} \geqslant c^{-n}.$$

Przyjmijmy $a = c^{-n}$ oraz $b = c^n$. Z rozumowania powyżej wynika, że jeśli każdy z ilorazów x_{j+1}/x_j jest mniejszy od c, to $x \in (a,b)^n$. Zatem jeśli x należy do brzegu zbioru $[a,b]^n$, to jakiś iloraz x_{j+1}/x_j jest większy lub równy c, skąd wynika $f(x) > c$.