

Symbol $B(0, r)$ oznacza kulę o promieniu r wg metryki określonej w zadaniu 3 z listy 11. Czy można znaleźć element x_0 , dla którego nie istnieje liczba $r > 0$ spełniająca

$$\overline{B(0, r)} \subset \{x^* : |x^*(x_0)| < 1\}$$

Równoważnie, czy można znaleźć element x_0 , dla którego nie istnieje liczba $R > 0$ o własności

$$\overline{B(0, 1)} \subset \{x^* : |x^*(x_0)| < R\} =: V_R$$

Niech $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ będzie gęstym ciągiem w kuli jednostkowej. Symbol X_n oznacza podprzestrzeń rozpiętą przez elementy $x_1, x_2, \dots, x_n$. Załóżmy, że $x_0 \notin X_n$ dla każdego n oraz $\|x_0\| = 1$. Na podstawie Wniosku 5.12 i Uwagi 5.14 z notatek do wykładu Analiza Funkcjonalna 1, istnieje funkcjonał x_n^* taki, że

$$x_n^*(x_0) = d(x_0, X_n), \quad \|x_n^*\| = 1, \quad x_n^*|_{X_n} = 0$$

Mamy

$$d(x_n^*, 0) = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} |x_n^*(x_k)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n}$$

Zatem $y_n^* := 2^n x_n^* \in \overline{B(0, 1)}$. Ponadto $y_n^*(x_0) = 2^n d(x_0, X_n)$. Wystarczy zatem znaleźć element x_0 taki, że ciąg liczb $2^n d(x_0, X_n)$ jest nieograniczony, bo wtedy $y_n^* \notin V_R$ dla pewnej dostatecznie dużej liczby n .

Można znaleźć nieskończony ciąg n_k taki, że $X_{n_k} \subsetneq X_{n_{k+1}}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $n_k \geq 2k$. Z twierdzenia Riesz'a istnieje element $y_k \in X_{n_{k+1}}$ taki, że $\|y_k\| = 1$ oraz $d(y_k, X_{n_k}) = 1$. Niech $Y_k := X_{n_k}$. Zatem $d(y_k, Y_k) = 1$. Z warunku $n_{k+1} \geq n_k + 1$ wynika, że $y_k \in Y_{k+1} \setminus Y_k$. Rozważmy element

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k, \quad a_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$$

Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(x_0, Y_n) &= d\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k y_k, Y_n\right) \geq d(a_n y_n, Y_n) - d\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k y_k, Y_n\right) \\ &\geq a_n d(y_n, Y_n) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \|y_k\| = a_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

Niech $a_k = 2/3^k$. Wtedy

$$d(x_0, Y_n) \geq 3^{-n}$$

Zatem

$$2^{n_k} d(x_0, X_{n_k}) = 2^{n_k} d(x_0, Y_k) \geq 2^{n_k} 3^{-k} \geq 4^k 3^{-k} \xrightarrow[k]{} \infty$$

Otoczenie

$$V := \{x^* : |x^*(x_k)| < 1, 1 \leq k \leq K\}$$

nie jest zawarte w kuli o środku w 0, względem metrycy podanej w zadaniu. Rzeczywiście, istnieje niezerowy funkcjonal x_0^* taki, że $x_0^*(x_k) = 0$ dla $1 \leq k \leq K$. Wtedy $rx_0^* \in V$ dla każdej liczby $r > 0$. Z kolei

$$d(rx_0^*, 0) = rd(x_0^*, 0) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$$

Mamy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |x^*(x_n) - y^*(x_n)| &\leq \sum_{n=0}^N 2^{-n} |x^*(x_n) - y^*(x_n)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |x^*(x_n) - y^*(x_n)| \\ &\leq \sum_{n=0}^N 2^{-n} |x^*(x_n) - y^*(x_n)| + 2^{-N+1} \end{aligned}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że $2^{-N+1} < \varepsilon/2$. Załóżmy, że

$$|x^*(x_n) - y^*(x_n)| < \varepsilon/(2N2^N), \quad n \leq N$$

Wtedy $d(x^*, y^*) < \varepsilon$. Tzn. pewne otoczenie y^* w $*$ -słabej topologii jest zawarte w kuli $B(y^*, \varepsilon)$.

Rozważmy otoczenie

$$V := \{x^* : |x^*(v_k) - y^*(v_k)| < \varepsilon, \ k = 1, 2, \dots, K\}$$

Założmy, że $d(x^*, y^*) < \delta$.

$$|x^*(x_{n_k}) - y^*(x_{n_k})| < 2^{n_k} \delta$$

Dla $\delta > 0$ istnieją $x_{n_1}, \dots, x_{n_K}$ takie, że $\|v_k - x_{n_k}\| < \delta$. Z określenia metryki otrzymujemy

$$|x^*(x_{n_k}) - y^*(x_{n_k})| < 2^{n_k} \delta$$

Wtedy

$$|x^*(v_k) - y^*(v_k)| \leq 2\|v_k - x_{n_k}\| + |x^*(x_{n_k}) - y^*(x_{n_k})| \leq 2\delta + 2^{n_k} \delta < (2 + \max_{1 \leq k \leq K} 2^{n_k}) \delta$$

To oznacza, że otoczenie V zawiera kulę o promieniu δ dla

$$(2 + \max_{1 \leq k \leq K} 2^{n_k}) \delta < \varepsilon$$