

Rozważamy funkcję $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2axy$. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ i wektora $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mamy $f(x, y) = (Av, v)$. Macierz A ma wartości własne równe $1 + a$ oraz $1 - a$. Wektorami własnymi o długości 1 są odpowiednio $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Macierz przejścia od bazy e_1 i e_2 do bazy v_1 i v_2 ma zatem postać $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. W bazie v_1 i v_2 macierz A jest diagonalna $D = \begin{bmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1-a \end{bmatrix}$. Ponadto $A = P^{-1}DP$. Widać, że $P^t = P$ oraz można sprawdzić, że $P^2 = I$, czyli $P^{-1} = P$. Zatem

$$f(x, y) = (Av, v) = (PDPv, v) = (DPv, Pv).$$

To oznacza, że

$$f(x, y) = (1 + a) \frac{1}{2}(x + y)^2 + (1 - a) \frac{1}{2}(x - y)^2.$$

Rozważmy funkcję $g(s, t) = (1 + a)s^2 + (1 - a)t^2$. Dla $a < 1$ poziomice funkcji g (dla $C > 0$) są elipsy natomiast dla $a > 1$ poziomice są hiperbole. Zamiana zmiennych $t = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$, $s = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$ jest złożeniem obrotu o $\pi/4$ w lewo i symetrii osiowej względem osi x , bo

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Stąd P jest symetrią osiową względem prostej o kącie nachylenia równym $-\pi/8$. Zatem, aby otrzymać poziomice funkcji $f(x, y) = C$ trzeba poziomice $g(s, t) = C$ przekształcić przez symetrię względem wspomnianej prostej.