(a) Rozważamy równanie

$$x^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0.$$

Mamy

$$x(x + yz - y^2 - x^2) = 0.$$

Stąd $x = 0$ lub

$$x + yz - y^2 - x^2 = 0. \tag{1}$$

Przyjmijmy, że $x \neq 0$. Wtedy zmienną z można obliczyć (zresztą bardzo łatwo) tylko, gdy $y \neq 0$. Różniczkujemy równość (1) względem x i y. Pamiętamy, że $z = z(x, y)$. Otrzymujemy dwie równości

$$\begin{aligned} 1 + y\frac{\partial z}{\partial x} - 2x &= 0, \\ z + y\frac{\partial z}{\partial y} - 2y &= 0. \end{aligned}$$

Szukamy ekstremów. W punkcie, gdzie przyjęte jest ekstremum obie pochodne cząstkowe zerują się jednocześnie. Otrzymujemy wtedy dwa równania.

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 0, \\ z - 2y &= 0. \end{aligned}$$

To oznacza, że $x = \frac{1}{2}$ oraz $z = 2y$. Podstawiamy do równania (1), aby uzyskać

$$\frac{1}{2} + 2y^2 - y^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

To równanie prowadzi do sprzeczności. Zatem funkcja $z = z(x, y)$ nie posiada ekstremów lokalnych.

(b) Ten sam wynik uzyskamy, jeśli zastosujemy rózniczkowanie jawne. Przy założeniu $x \neq 0$ oraz $y \neq 0$ obliczamy, że

$$z = \frac{x^2 - x}{y} + y.$$

Wtedy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 1}{y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - x^2}{y^2} + 1.$$

Pochodna $\frac{\partial z}{\partial x}$ zeruje się tylko dla $x = \frac{1}{2}$. Ale dla $x = \frac{1}{2}$ mamy

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{4y^2} + 1 > 0.$$

Zatem nie ma punktu, w którym obie pochodne zerują się.