

1. Funkcje analityczne

Liczby zespolone - powtórka

1. Zapisać w postaci $x + iy$ podane liczby.

$$\begin{array}{llll} (3 + 2i) - (4 - i) & (2 - 3i)(-2 + i) & i(2 - 7i) & \frac{1 + i}{2 - i} \\ (1 - i)^4 & (3 + i)(3 - i) \left(\frac{2 + i}{10} \right) & \frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{5i} & \frac{2i}{(i - 1)(i - 2)(i - 3)} \end{array}$$

2. Rozwiązać równania

$$z^2 - 2z + 2 = 0; \quad 3z^2 + 2z + 1 = 0.$$

3. Uzasadnić, że jeśli $z_1 z_2 z_3 = 0$, to jeden z czynników jest równy zeru.

4. Uzasadnić zasady przemienności i łączności mnożenia:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3.$$

5. Zaznaczyć na płaszczyźnie liczby z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$ oraz $z_1 - z_2$.

(a) $z_1 = -3 + i$, $z_2 = 1 + 4i$.

(b) $z_1 = 3$, $z_2 = -3 + 5i$.

6. Pokazać, że wektor przedstawiający sumę $z_1 + z_2 + z_3$ jest zamykającym bokiem czworokąta, o pozostałych bokach z_1 , z_2 i z_3 . Jaki jest kierunek tego wektora ?

7. Jaki punkt płaszczyzny przedstawia $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$, w odniesieniu do punktów z_1 i z_2 ?

8. Obliczyć \bar{z} , $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ oraz $|z|$.

$$z = 3 - 4i$$

$$z = -2i$$

$$z = 4$$

$$z = 2 - 2i$$

9. Wyprowadzić podane wzory.

$$\begin{array}{llll} \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 & \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0) & |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \\ \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} & \overline{i z} = -i \bar{z} & \overline{(z^4)} = (\bar{z})^4 & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2 \bar{z}_3}, \quad z_2 z_3 \neq 0 \end{array}$$

10. Pokazać, że jeśli $z^2 = (\bar{z})^2$, to liczba z jest rzeczywista lub czysto urojona.

11. Podać algebraiczny dowód nierówności $|z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|$.

12. Pokazać, że $|z| \geq (|x| + |y|)/\sqrt{2}$.

13. Opisać położenie punktów

(a) $|z| = 1$

(b) $|z - 2| = 3$

(c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$

14. Opisać położenie punktów z spełniających

$$z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a} = b\bar{b}$$

dla ustalonych liczb zespolonych a i b .

15. Opisać geometrycznie warunki jakie spełniają liczby z_1 i z_2 jeśli

(a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

(b) $|z_1 + z_2| = \left| |z_1| - |z_2| \right|$

16. Zapisać liczby w postaci trygonometrycznej.

$1 + i\sqrt{3}$

i

-2

$-2 - 2i$

$1 - 2i$

17. Wykonać obliczenia korzystając z postaci trygonometrycznej.

$i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$

$\frac{2 - 2i}{-1 - i}$

$\frac{3}{(\sqrt{3} - i)^2}$

$(-2 - 2i)^7$

$(1 - i)^4$

$(\sqrt{3} + i)^{-3}$

18. Obliczyć podane pierwiastki.

(a) drugi z i (b) trzeci z 1 (c) trzeci z -1 (d) szósty z 64

(e) szósty z $-i$ (f) czwarty z -9 trzeci z $1 + i$

19. Rozwiązać $x^4 + 4 = 0$ i rozłożyć wielomian $x^4 + 4$ na iloczyn dwu trójmianów kwadratowych z rzeczywistymi współczynnikami.

20. Pokazać, że te same znane wzory obowiązują przy rozwiązywaniu równania $az^2 + bz + c = 0$, gdzie a, b, c są współczynnikami zespolonymi.

21. Opisać graficznie obszary opisane w płaszczyźnie zespolonej nierównościami.

(a) $|x| < 3$

(b) $\text{Im } z > 1$

(c) $0 \leq \arg z < \pi$

(d) $1 < |z - 2i| < 2$

(e) $\text{Im}(z^2) > 0$

(f) $|2z - 3| > 3$

(g) $|z - 1| + |z + 1| \leq 4$

(h) $|z| < |z - 4|$