2. Funkcje analityczne

1. Dla $f(z) = 3xy + i(x - y^2)$ obliczyć granicę $\lim\limits_{z\to 3-2i} f(z)$.

2. Pokazać, że jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie z, to f jest ciągła w punkcie z.

3. Wykazać, że

$$(cf)'(z) = cf'(z),\ c \in \mathbb{C} \qquad \frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

4. Wykazać, że dla funkcji $f(z) = \operatorname{Re} z$ pochodna $f'(z)$ nie istnieje w żadnym punkcie.

5. Wykonać to samo polecenie dla funkcji $f(z) = \operatorname{Im} z$ oraz $g(z) = \overline{z}$.

6. Czy funkcja

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\overline{z})^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

ma pochodną dla $z = 0$?

7. W których punktach funkcja $f(z) = x^3 + i(1-y)^3$ jest różniczkowalna ?

8. Czy funkcja z zadania 6 spełnia warunki Cauchy-Riemanna w punkcie $z = 0$?

9. Sprawdzić, w których punktach funkcja $f(z) = 2y - ix$ jest różniczkowalna.

10. Zbadać, w których punktach podane funkcje są holomorficzne.

$$f(z) = xy + iy \qquad f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y \qquad f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \qquad f(z) = \frac{1}{z+1}$$

11. Funkcja f jest określona w otwartym i spójnym podzbiorze płaszczyzny $D \subset \mathbb{C}$ oraz $f'(z) = 0$ dla $z \in D$. Pokazać, że funkcja $f(z)$ jest stała.

12. Znaleźć wszystkie punkty, w których funkcja

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

jest różniczkowalna.

13. Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w zbiorze otwartym D oraz funkcja $\operatorname{Re} f(z)$ jest stała na D. Czy funkcja $f(z)$ musi być stała na D ?

14. Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w zbiorze otwartym D oraz funkcja $|f(z)|$ jest stała na D. Czy funkcja $f(z)$ musi być stała na D ?

15. Pokazać, że jeśli w spójnym i otwartym zbiorze D funkcje $f(z)$ oraz $\overline{f(z)}$ są holomorficzne, to $f(z)$ jest stała.

16. Rozważmy funkcję $f(z) = \sqrt{z}$ określoną dla $0 < \arg z < \pi$, $|z| > 0$ wzorem

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}[\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)].$$

Znaleźć funkcje $u = \operatorname{Re} f$ oraz $v = \operatorname{Im} f$ oraz sprawdzić, że spełnione są warunki Cauchy-Riemanna.

17. Jeśli $f = u + iv$ oraz $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, to u i v można traktować jako funkcje zmiennych r i θ. Pokazać, że spełnione są warunki Cauchy-Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy u i v spełniają

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

18. Pokazać, że podane funkcje są harmoniczne oraz znaleźć sprzężone funkcja harmoniczne.

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \qquad u = 2x - x^3 + 3xy^2 \qquad u = \cos x \cosh y \qquad u = \frac{y}{x^2+y^2}$$

19. Pokazać na przykładzie, że dla funkcji holomorficznych nie jest spełnione twierdzenie o wartości średniej (twierdzenie Lagrange'a).