3. Funkcje analityczne

1. Pokazać, że $\exp \pi i = -1$ oraz, że $\exp(2n+1)\pi i = -1$, dla dowolnej liczby całkowitej n.

2. Pokazać, że
$$\exp \frac{1+\pi i}{4} = \frac{\sqrt[4]{e}}{\sqrt{2}}(1+i)$$

3. Znaleźć liczbę zespoloną $\exp(-2 + i\pi/2)$.

4. Pokazać, że jeśli $z = r \exp i\theta$, to $\overline{z} = r \exp(-i\theta)$.

5. Pokazać, że dla dowolnej liczby z mamy $e^z \neq 0$.

6. Rozwiązać równania poprzez wskazanie części rzeczywistej i urojonej.
$$\exp z = -2 \qquad\qquad \exp z = 1 + i\sqrt{3}$$

7. Wyprowadzić wzory
$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2} \qquad (e^z)^k = e^{kz},\ k \in \mathbb{Z} \qquad e^{z+2k\pi i} = e^z,\ k \in \mathbb{Z}$$

8. Pokazać, że $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$.

9. Rozwiązać równanie $\exp i\overline{z} = \overline{\exp iz}$.

10. Obliczyć $|\exp(i - 2z)|$ oraz $|\exp(z^2)|$.

11. Pokazać, że jeśli $|\exp(-2z)| < 1$, to $\operatorname{Re} z > 0$.

12. Pokazać, że funkcja $\exp(z^2)$ jest holomorficzna. Obliczyć jej pochodną.

13. Obliczyć $\operatorname{Im} \exp(1/z)$. Dlaczego otrzymana funkcja jest harmoniczna poza początkiem układu współrzędnych ?

14. Czy funkcja $\exp \overline{z}$ jest holomorficzna ?

15. Pokazać, że
$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \sin(iy) &= i \sinh y, \qquad \cos(iy) = \cosh y \end{aligned}$$

16. Obliczyć $\operatorname{Re}(\operatorname{tg} z)$.

17. Udowodnić, że funkcje $\sin x \sinh y$ oraz $\cos 2x \sinh 2y$ są harmoniczne.

18. Pokazać, że jedynymi rozwiązaniami równania $\sin z = 0$ są liczby $z = n\pi$ dla $n \in \mathbb{Z}$.

19. Znaleźć rozwiązania równania $\sin z = \cosh 4$.

20. Czy funkcje $\sin \overline{z}$ oraz $\cos \overline{z}$ są holomorficzne ?

21. Obliczyć $(d/dz)(\sinh z)$.

22. Wyprowadzić wzór
$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2.$$

23. Znaleźć wszystkie miejsca zerowe funkcji $\cosh z$.

24. Rozwiązać równanie $\sinh z = i$.

25. Pokazać, że $\log(-1) = \pm(2n+1)\pi i$, dla $n = 0, 1, 2, \ldots$.

26. Pokazać, że wartością główną liczby $\log(1-i)$ jest $\frac{1}{2}\ln 2 - i\pi/4$.

27. Znaleźć $\log[i^{\frac{1}{2}}]$.

28. Rozwiązać równanie $\log z = i\pi/2$.

29. Udowodnić, że $\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$ oraz $k \log z = \log z^k$, gdzie k jest liczbą wymierną.

30. Obliczyć i^i oraz $(1+i)^i$.

31. Pokazać, że $\ln(x^2 + y^2)$ jest funkcją harmoniczną. Jaka funkcja harmoniczna jest sprzężona do niej ?

32. Niech $z = re^{i\theta}$, gdzie $r > 0$. Pokazać, że $\operatorname{Re}[\log(1-z)] = \frac{1}{2}\ln(1 + r^2 - 2r\cos\theta)$.