4. Funkcje analityczne

Przy odwzorowaniach $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}$ przyjmujemy oznaczenia $z = x + yi$ w dziedzinie odwzorowania oraz $w = f(z) = u + vi$ w obrazie.

1. Pokazać, że przy odwzorowaniu $w = iz + i$ półpłaszczyzna $x > 0$ przechodzi na półpłaszczyznę $v > 1$.

2. Znaleźć obraz półpłaszczyzny $y > 0$ przy odwzorowaniu $w = (1 + i)z$.

3. Znaleźć obraz pasa $x > 0,\ 0 < y < 2$ przy odwzorowaniu $w = iz + 1$.

4. Opisać obraz wycinka koła $0 < \theta < \pi/4\ r < 1$ przy odwzorowaniach (a) $w = z^2$; (b) $w = z^3$; (c) $w = z^4$.

5. Obrazem jakiego zbioru w płaszczyźnie z jest kwadrat ograniczony liniami $u = 1,\ u = 2,\ v = 1,\ v = 2$ przy odwzorowaniu $w = z^2$?

6. Pokazać, że funkcja $w = z^2$ odwzorowuje proste $y = c$ w parabole o ogniskach w punkcie $w = 0$.

7. Znaleźć obraz pasa $0 < y < 1/(2c)$ przy odwzorowaniu $w = 1/z$.

8. Pokazać, że obrazem półpłaszczyzny $y > c$ przy odwzorowaniu $w = 1/z$ jest wnętrze koła, o ile $c > 0$. Jaki jest obraz, gdy $c = 0$ lub $c < 0$?

9. Znaleźć obraz hiperboli $x^2 - y^2 = 1$ przy odwzorowaniu $w = 1/z$.

10. Niech $f_1(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ oraz $f_2(z) = \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$ będą dwoma homografiami takimi, że $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ oraz $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$. Pokazać, że $f(z) = f_2(f_1(z))$ też jest homografią postaci $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$, przy czym współczynniki można obliczyć wzorem

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

11. Korzystając z poprzedniego zadania pokazać, że homografie $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ oraz $g(z) = \dfrac{dz - b}{-cz + a}$ są odwrotne do siebie, tzn. $g(f(z)) = z$.

12. Znaleźć homografię odwzorowującą punkty $z_1 = 2,\ z_2 = i$, oraz $z_3 = -2$ na punkty $w_1 = 1,\ w_2 = i$, oraz $w_3 = -1$.

13. Znaleźć homografię odwzorowującą punkty $z_1 = \infty,\ z_2 = i$, oraz $z_3 = 0$ na punkty $w_1 = 0,\ w_2 = i$, oraz $w_3 = \infty$.

14. Znaleźć punkty stałe homografii

$$w = \frac{z - 1 - i}{z + 2}.$$

15. Pokazać, że przy odwzorowaniu $w = 1/z$ środek okręgu nie przechodzi na środek obrazu okręgu.

16. Używając współrzędnych biegunowych pokazać, że odwzorowanie

$$w = z + 1/z$$

przekształca zarówno górny jak i dolny półokrąg $r = 1$ na przedział $-2 \leqslant u \leqslant 2$, $v = 0$.

17. Pokazać, że że odwzorowanie

$$w = z + 1/z$$

przekształca okrąg $r = c$ w elipsę

$$u = \left(c + \frac{1}{c}\right)\cos\theta, \qquad v = \left(c - \frac{1}{c}\right)\sin\theta.$$