5. Funkcje analityczne

1. Obliczyć całkę $\int_C \overline{z}\, dz$, gdzie C jest parabolą $y = x^2$ od 0 do $1+i$.

2. Obliczyć $\int_C \frac{1}{z}\, dz$, gdzie C jest okręgiem o promieniu 2 o środku w 0 zorientowanym dodatnio (tzn. przeciwnie do wskazówek zegara).

3. Obliczyć $\int_C f(z)\, dz$, gdzie C jest krzywą $y = x^3$ od $-1-i$ do $1+i$ oraz

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } y < 0 \\ 4y & \text{dla } y \geqslant 0. \end{cases}$$

4. Niech C będzie częścią okręgu $\gamma(t) = e^{it}$ w pierwszej ćwiartce od $a = 1$ do $b = i$. Znaleźć możliwie najmniejsze oszacowanie wielkości

$$\left| \int_C (z^2 - \overline{z}^4 + 5)\, dz \right|.$$

5. Obliczyć $\int_C f(z)\, dz$, gdzie $f(z) = z + 2\overline{z}$ i C jest drogą od $z = 0$ do $z = 1+2i$ złożoną z odcinka od 0 do 1 i odcinka od 1 do $1+2i$.

6. Udowodnić oszacowania bez obliczania całek.

(a) $\left| \int_C \frac{dz}{z^2} \right| \leqslant 2$, gdzie C jest odcinkiem od i do $2+i$.

(b) $\left| \int_C (x^2 + iy^2)\, dz \right| \leqslant 2$, gdzie C jest odcinkiem od $-i$ do i.

(c) $\left| \int_C (x^2 + iy^2)\, dz \right| \leqslant \pi$, gdzie C jest półokręgiem o promieniu 1, od $-i$ do i.

7. Obliczyć całki z zadania 6(a),(b) i porównać wynik z otrzymanym oszacowaniem.

8. Pokazać, że dla dowolnej krzywej łączącej punkty a i b mamy $\int dz = b - a$. `Wskazówka:` Ile wynosi suma Riemanna ?

9. Dla krzywej C łączącej punkty a i b niech C^- oznacza tę samą krzywą przebieganą odwrotnie, czyli od punktu b do a. Pokazać, że

$$\int_{C^-} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz.$$

`Wskazówka:` Rozważyć podział P krzywej C punktami $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Porównać sumy Riemanna dla obu całek.

10. Obliczyć całkę $\int_C e^{iz}\, dz$, gdzie C jest brzegiem kwadratu o wierzchołkach $z = 0,\ z = 1,\ z = 1+i,\ z = i$.

11. Niech C będzie jakąś krzywą łączącą 0 z $\pi + 2i$. Obliczyć $\int_C \cos(z/2)\, dz$.

12. Niech C będzie krzywą zawartą w prawej półpłaszczyźnie, łączącą $-i$ z i, nie przechodzącą przez zero. Obliczyć $\int_C \frac{1}{z}\, dz$. `Wskazówka:` $(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}$.

13. Niech $f(z) = z^c$, gdzie $-\pi < \arg z < \pi$ a c jest ustaloną liczbą zespoloną. Obliczyć pochodną $f'(z)$. Niech C będzie krzywą łączącą punkty -1 i 1 leżącą w górnej półpłaszczyźnie. Obliczyć całkę $\int_C z^i\, dz$.

14. Niech $P(z)$ będzie wielomianem zmiennej z. Wyjaśnić dlaczego $\int_C P(z)\, dz = 0$, jeśli C jest krzywą zamkniętą.

15. Niech $\gamma(t)$ będzie parametryzacją krzywej C, gdy $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Niech $h(t)$ będzie różniczkowalną funkcją rosnącą taką, że $h(0) = \alpha$ i $h(1) = \beta$. Wtedy $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(h(t))$ jest inną parametryzacją. Pokazać, że całka $\int_C f(z)\, dz$ nie zależy od wyboru parametryzacji, tzn.

$$\int_\alpha^\beta (f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_0^1 f(\widetilde{\gamma}(s))\widetilde{\gamma}'(s)\, ds.$$