6. Funkcje analityczne

1. Niech C będzie okręgiem $|z| = 1$ przebieganym w kierunku dodatnim lub ujemnym. Wyjaśnić dlaczego każda z poniższych całek jest równa zero.

$$\int_C \frac{z\,dz}{z-2} \qquad \int_C \frac{dz}{z^2+2z+2} \qquad \int_C ze^{2z}\,dz \qquad \int_C \frac{dz}{\cos z} \qquad \int_C \frac{dz}{\cosh z}.$$

2. Znaleźć wartość całki

$$\int_C \frac{dz}{z-2-i},$$

gdzie C jest brzegiem (a) kwadratu ograniczonego prostymi $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$; (b) prostokątem ograniczonym prostymi $x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 2$, przebieganym w kierunku dodatnim.

3. Niech C będzie dowolną krzywą od punktu 2 do punktu $-2+i$. Obliczyć całki

$$\int_C (z+2)^2\,dz \qquad \int_C ze^z\,dz \qquad \int_C \operatorname{Log} z\,dz,$$

przy czym w ostatniej całce zakładamy, że C nie przecina półprostej $x \leqslant 0,\ y = 0$.

4. Znaleźć wartość całki $\int_C (dz/z)$, gdzie C jest krzywą od $-2i$ do $2i$, położoną w prawej półpłaszczyźnie $x > 0$, (poza końcami, które leżą na $x = 0$).

5. Obliczyć całkę z poprzedniego zadania jeśli C jest położona w lewej półpłaszczyźnie.

6. Niech $f(z)$ będzie funkcją ciągłą. Oznaczmy

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \qquad\qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy).$$

Niech C będzie krzywą w płaszczyźnie zespolonej.

(a) Pokazać, że

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy),$$

gdzie całki po prawej stronie są całkami krzywoliniowymi zorientowanymi (por. materiał z 3 semestru analizy).

(b) Załóżmy, że u i v mają ciągłe pochodne cząstkowe. Pokazać na podstawie twierdzenia Greena, że jeśli krzywa C jest brzegiem obszaru jednospójnego D (tzn. bez "otworów") i C jest przebiegana w kierunku dodatnim, to

$$\int_C (u\,dx - v\,dy) = -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad \int_C (v\,dx + u\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

(c) Pokazać, że jeśli funkcje u i v spełniają warunki Cauchy'ego-Riemanna oraz ich pochodne cząstkowe są ciągłe, to

$$\int_C f(z)\,dz = 0,$$

gdzie C jest krzywą opisaną w (b).

7. Pokazać, że dla dowolnej zamkniętej krzywej C obiegającej jednokrotnie punkt z_0 w kierunku dodatnim mamy

$$\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i.$$

8. Krzywa zamknięta C jest przebiegana w kierunku dodatnim. Pokazać, że

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

gdy

(a) C jest okręgiem $|z - z_0| = r_0$.

(b) C jest dowolną krzywą obiegającą punkt z_0.

(c) C jest dowolną krzywą taką, że punkt z_0 leży na zewnątrz C.

9. Niech C będzie okręgiem $|z| = 2$ oraz

$$g(z_0) = \int_C \frac{2z^2 - z + 1}{z - z_0}\, dz.$$

Pokazać na dwa sposoby, że $g(1) = 2\pi i$. Ile wynosi $g(z_0)$, gdy $|z_0| > 2$?

10. Obliczyć każdą z całek, gdzie C jest brzegiem kwadratu o bokach położonych wzdłuż prostych $x = \pm 2$ i $y = \pm 2$.

$$\int_C \frac{e^z\, dz}{z + \pi i/2} \qquad \int_C \frac{\cos z}{z}\, dz$$

$$\int_C \frac{\operatorname{tg}(z/2)}{(z - x_0)^2}\, dz \quad (-2 < x_0 < 2) \qquad \int_C \frac{\sinh 2z}{z^4}\, dz$$

11. Niech C będzie krzywą zamkniętą w kierunku dodatnim oraz

$$g(z_0) = \int_C \frac{z^3 - z}{(z - z_0)^3}\, dz.$$

Pokazać, że jeśli z_0 leży wewnątrz C, to $g(z_0) = 6\pi z_0 i$ oraz $g(z_0) = 0$ jeśli z_0 leży na zewnątrz C.

12. Podać przykład funkcji analitycznej w kole $|z| \leqslant 1$ takiej, że minimum funkcji $|f(z)|$ jest przyjęte wewnątrz koła jednostkowego. Czy minimum może być liczbą dodatnią ?

13. Korzystając z zasadniczego twierdzenia algebry pokazać, że każdy wielomian $P(z)$ stopnia n o współczynnikach zespolonych ma postać

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

14. Niech $P(z)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Pokazać, że jeśli liczba z_0 jest pierwiastkiem tego wielomianu, to również liczba $\overline{z_0}$ jest pierwiastkiem.

15. Pokazać, że każdy wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na iloczyn czynników liniowych postaci $x - a$ oraz czynników kwadratowych postaci $x^2 + bx + c$, gdzie $b^2 - 4c < 0$. `Wskazówka:` Skorzystać z poprzedniego zadania i ze wzoru

$$(x - z_0)(x - \overline{z_0}) = x^2 - (2\operatorname{Re} z_0)x + |z_0|^2.$$