7. Funkcje analityczne

1. Pokazać, że

$$e^z = e + e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}.$$

2. Pokazać, że

$$\text{(a)}\ \frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(z+1)^n, \qquad \text{gdy } |z+1|<1;$$

$$\text{(b)}\ \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n, \qquad \text{gdy } |z-2|<2.$$

3. Znaleźć rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $\cos z$ w punkcie $z=\pi/2$.

4. Znaleźć rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $\sinh z$ w punkcie $z=\pi i$.

5. Zbadać, w jakim kole jest zbieżny szereg MacLaurina funkcji $\operatorname{tgh} z$. Znaleźć kilka pierwszych wyrazów szeregu.

6. Pokazać, że dla $0<|z|<4$ zachodzi

$$\frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}.$$

7. Pokazać, że dla $x\neq 0$,

$$\frac{\sin(x^2)}{x^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^{10}}{7!} + \dots .$$

8. Przedstawić funkcję

$$f(z) + \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

za pomocą szeregu dodatnich i ujemnych potęg $(z-1)$, zbieżnego do $f(z)$ dla $0<|z-1|<2$.

9. Uzasadnić rozwinięcie w szereg MacLaurina.

$$\frac{z+1}{z-1} = -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}z^n, \qquad |z|<1.$$

10. Uzasadnić rozwinięcie w szereg MacLaurina.

$$z\cosh(z^2) = z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{4n+1}, \qquad |z|<\infty.$$

11. Uzasadnić rozwinięcie w szereg Taylora.

$$\frac{z-1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{n+1}, \qquad |z-1|<1.$$

12. Uzasadnić rozwinięcie w szereg Laurenta

$$\frac{\sinh z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n-1}, \qquad |z|>0.$$

13. Uzasadnić cztery pierwsze wyrazy szeregu Laurenta

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \dots \qquad 0<|z|<1.$$

14. Uzasadnić cztery pierwsze wyrazy szeregu Laurenta

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z - \left[\frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2}\right] z^3 + \ldots \qquad 0 < |z| < \pi.$$

15. Podać dwa rozwinięcia w szereg Laurenta względem potęg z funkcji

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)},$$

i wskazać, w jakim obszarze są prawdziwe.

16. Rozwinąć funkcję $f(z) = z/(1+z^2)$ (a) w szereg dodatnich potęg zmiennej z, (b) w szereg ujemnych potęg zmiennej z. W obu przypadkach wskazać obszar, w którym prawdziwe jest rozwinięcie.

17. Znaleźć szereg MacLaurina funkcji $(1-z)^{-2}$ poprzez różniczkowanie szeregu MacLaurina dla funkcji $(1-z)^{-1}$.

18. Znaleźć szereg Taylora funkcji z^{-2} w punkcie $z = 1$ poprzez różniczkowanie takiego szeregu Taylora dla funkcji z^{-1}.

19. Pokazać, że funkcja $\mathrm{Log}\,(1-z)$ jest analityczna w obszarze $|z| < 1$. `Wskazówka:` Gdzie są położone liczby $1 - z$, gdy $|z| < 1$? Poprzez wycałkowanie szeregu MacLaurina dla funkcji $(1-z)^{-1}$ od zera do z pokazać, że

$$\mathrm{Log}\,(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

20. Znaleźć rozwinięcie w szereg MacLaurina funkcji $(z-a)^{-1}$ w obszarze $|z| > k$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą i $a^2 < 1$. Następnie podstawić $z = e^{i\theta}$ aby otrzymać wzory

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n+1)\theta &= \frac{\sin\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} \\
\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(n+1)\theta &= \frac{\cos\theta - a}{1 + a^2 - 2a\cos\theta}.
\end{aligned}$$