## 8. Funkcje analityczne

*Biegunem rzędu m nazywamy osobliwy punkt izolowany $z_0$, w pobliżu którego funkcja $f(z)$ ma postać*

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{b_1}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad b_m \neq 0.$$

**1.** Pokazać, że izolowane punkty osobliwe podanych funkcji są biegunami. Obliczyć rzędy biegunów rezidua funkcji.

$$\frac{z+1}{z^2-2i} \qquad \frac{z^2+1}{z^3+3z^2+2z} \qquad \frac{1}{z^3-z^2}$$

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4} \qquad \frac{z}{\cos z} \qquad \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$$

**2.** Znaleźć reziduum w $z=0$ funkcji $\dfrac{1+e^z}{\sin z + z\cos z}$.

**3.** Znaleźć reziduum w $z=0$ funkcji $\sin^{-2} z$. `Wskazówka:` Funkcja jest parzysta.

**4.** Opisać charakter punktów osobliwych funkcji $\dfrac{\exp(1/z)}{z(1+z)^2}$.

**5.** Obliczyć całkę $\int_C \operatorname{tg} z\, dz$, gdzie $C$ jest okręgiem $|z|=2$ w kierunku dodatnim.

**6.** Obliczyć całkę $\int_C \dfrac{dz}{\sinh z}$, gdzie $C$ jest okręgiem $|z|=4$ w kierunku dodatnim.

**7.** Obliczyć całkę $\int_C \dfrac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}\, dz$, gdzie $C$ jest okręgiem (a) $|z-2|=2; (b)|z|=4$ zorientowanym dodatnio.

**8.** Obliczyć całkę $\int_C \dfrac{\cosh \pi z}{z(z^2+1)}\, dz$, gdzie $C$ jest okręgiem $|z|=2$ zorientowanym dodatnio.

**9.** Obliczyć całkę $\int_C \dfrac{dz}{z^3(z+4)}$, gdzie $C$ jest okręgiem (a) $|z|=2; (b)|z+2|=3$ zorientowanym dodatnio.

**10.** $C$ jest okręgiem wokół zera zorientowanym dodatnio. Obliczyć całki

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z^2}\, dz \qquad \int_C \frac{dz}{z\sin z} \qquad \int_C \frac{dz}{z^2 \sin z} \qquad \int_C z\, e^{1/z}\, dz$$

**11.** Korzystając z reziduów obliczyć całki

$$\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} \qquad \int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{x^6+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^6\, dx}{(x^4+1)^2} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{x^2+1} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\ (a>b>0) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{(x^2+b^2)^2} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{x^4+4}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2} \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} \qquad \int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x\, dx}{x^2+4x+5} \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x\, dx}{(x+a)^2+b^2}$$

**12.** Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych za pomocą reziduów.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta \, d\theta}{5-4\cos 2\theta} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta} \; (a^2<1)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \; (a^2<1) \qquad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} \; (a>1) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta \, d\theta}{1+2a\cos\theta+a^2} \; (a^2<1).$$

**13.** Korzystając z $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$, scałkować funkcję $\exp(-z^2)$ po brzegu prostokąta $-a \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, i przejść do granicy $a \to \infty$ aby otrzymać wzór

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

**14.** Pokazać, że dla $0<k<1$ zachodzi wzór $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{kx}\,dx}{1+e^x} = \frac{\pi}{\sin\pi k}$ poprzez całkowanie funkcji $e^{kx}/(1+e^x)$ wzdłuż brzegu prostokąta $y=0$, $x=\pm a$, i $y=2\pi$ i przejście do granicy $a\to\infty$.

**15.** Korzystając z $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$, scałkować funkcję $\exp(-z^2)$ wzdłuż brzegu wycinka kołowego $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant r \leqslant R$ i przejść do granicy $R\to\infty$, aby otrzymać wzory

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

`Wskazówka:` Aby udowodnić, że całka wzdłuż fragmentu okręgu dąży do zera pokazać, że jej wartość bezwględna da się oszacować z góry przez

$$I = R\int_0^{\pi/4} \exp(-R^2\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2}\exp(-R^2\sin\theta)\,d\theta.$$

Następnie skorzystać z nierówności $\sin\theta \geqslant 2\theta/\pi$.

**16.** Pokazać, że $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ poprzez scałkowanie funkcji $z^{-1}e^{iz}$ wzdłuż krzywej złożonej z dwu przedziałów $[-R,-r]$ oraz $[r,R]$ na osi $x$ oraz górnego półokręgu o promieniu $r$ i górnego półokręgu o promieniu $R$. Przy dowodzeniu, że całka po półokręgu o promieniu $R$ dąży do zera, gdy $R\to\infty$, zastosować sposób z zadania 15.