Wielomiany ortogonalne i dyskretne zagadnienie brzegowe

Ryszard Szwarc*

1 Nieujemna linearyzacja wielomianów ortogonalnych

Następująca tożsamość jest dobrze znana

$$\cos n\theta \cos m\theta = \frac{1}{2}\cos(n+m)\theta + \frac{1}{2}\cos(n-m)\theta.$$

Wiadomo, że $\cos n\theta$ jest wielomianem stopnia n od $\cos\theta$ tzn.

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta).$$

T_n nazywamy n-tym wielomianem Czebyszewa. Otrzymujemy zatem

$$T_n T_m = \frac{1}{2}T_{n+m} + \frac{1}{2}T_{n-m} \qquad n \geqslant m > 0.$$

W szczególności oznacza to, że iloczyn dwu wielomianów Czebyszewa jest kombinacją liniową wielomianów Czebyszewa z nieujemnymi współczynnikami. Zauważmy, że wielomiany Czebyszewa stanowią układ ortogonalny, ponieważ jak łatwo wyprowadzić, zachodzi

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \text{dla} \quad n \neq m.$$

Podobne zagadnienie można badać dla innych klas wielomianów, szczególnie wielomianów ortogonalnych.

Niech μ będzie miarą na prostej mającą wszystkie momenty skończone. Stosując proces ortogonalizacji Grama–Schmida do ciągu jednomianów $1, x, x^2, \ldots$ względem iloczynu skalarnego $(f,g) = \int f\bar{g}\,d\mu$ otrzymujemy układ wielomianów p_0, p_1, $p_2, \ldots$ o następujących własnościach.

(i) $p_n(x) = k_n x^n + \ldots,\ k_n > 0$,

*Odczyt przedstawiony na XIII Jubileuszowym Zjeździe Matematyków Polskich w Jachrance, 1994.

(ii) $p_n \perp \{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$,

(iii) $\operatorname{span}\{p_0, p_1, \ldots, p_n\} = \operatorname{span}\{1, x, \ldots, x^n\}$.

Mnożąc dwa wielomiany p_n i p_m otrzymujemy wielomian stopnia $n+m$, który z własności (iii) jest kombinacją liniową pierwszych $n+m$ wielomianów układu $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$. Z ortogonalności można wykazać, że wielomiany o indeksach mniejszych od $|n-m|$ nie występują w tej kombinacji tzn.

$$p_n(x)p_m(x) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n,m,k)p_k(x). \tag{1}$$

Liczby $c(n,m,k)$ są nazywane są współczynnikami linearyzacyjnymi. Interesuje nas problem przy jakich warunkach zachodzi

$$\forall n, m, k \quad c(n,m,k) \geqslant 0.$$

Mówimy wtedy o nieujemnej linearyzacji. Oto lista zagadnień, w których ta własność ma zastosowanie.

1. Analiza harmoniczna rozwinięć względem układu $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.
2. Oszacowania wzrostu wielomianów p_n.
3. Dodatnia określoność wielominów p_n.
4. Twierdzenia graniczne związane z układem $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Na zakończenie odniesiemy się do punktu 1 i 2. Obecnie przejdziemy do wielomianów Jacobi'ego, dla których zagadnienie nieujemnej linearyzacji było intensywnie badane.

Dla $\alpha, \beta > -1$ wielomiany $p_n^{(\alpha,\beta)}$ ortogonalne względem miary

$$d\mu_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \qquad -1 < x < 1,$$

nazywamy wielomianami Jacobi'ego. Wśród nich, przy odpowiednich wartościach parametrów można odnaleźć

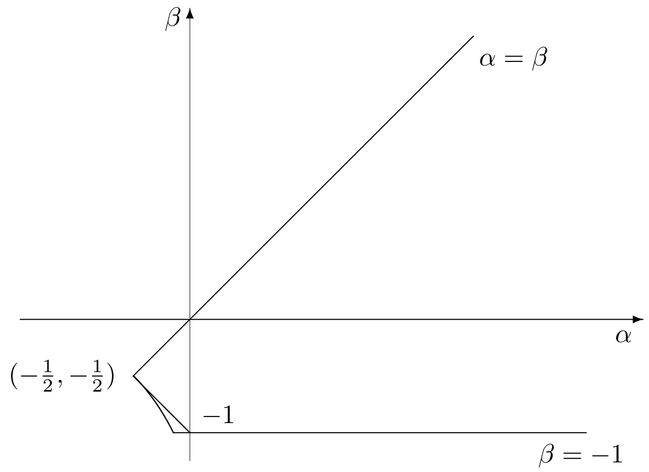
wielomiany Czebyszewa	$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$,
wielomiany Legendre'a	$\alpha = \beta = 0$,
wielomiany Czebyszewa II rodzaju	$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$,
wielomiany ultrasferyczne	$\alpha = \beta$.

Podajemy poniżej w skrócie historię linearyzacji dla wielomianów Jacobi'ego według kolejności: rok, autor i zakres parametrów, dla których udowodniono nieujemność.

(1919)	J. Dougall	$\alpha = \beta \geqslant -\frac{1}{2}$,
(1962)	E. Hylleraas	$\alpha = \beta \geqslant -\frac{1}{2}$ lub $\alpha = \beta + 1$,
(1971)	G. Gasper	$\alpha \geqslant \beta$ i $\alpha + \beta + 1 \geqslant 0$,
(1971)	G. Gasper	$\alpha \geqslant \beta$ i $c(2,2,2) \geqslant 0$.

Dougall znalazł jawny wzór dla współczynników $c(n,m,k)$ w przypadku $\alpha=\beta$, który pozwala łatwo rozstrzygnąć nieujemność. Z kolei Hylleraas znalazł wzór rekurencyjny dla $c(n,m,k)$ i zdołał go rozwiązać w dwu podanych wyżej przypadkach. Ten wzór rekurencyjny został wykorzystany przez Gaspera w dwu pracach z 1971. Warunki Gaspera podane w trzeciej i czwartej linii nieznacznie różnią się od siebie, przy czym ostatni warunek jest już konieczny i wystarczający dla nieujemnej linearyzacji. Na rysunku pokazujemy orientacyjnie odpowiadające tym warunkom obszary. Obszar w linii 4 jest większy od obszaru w linii 3 zaledwie o trójkąt krzywoliniowy położony po lewej stronie odcinka łączącego punkty $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ i $(0,-1)$. Dla dociekliwych podajemy, że warunek $c(2,2,2)\geqslant 0$ przy pomocy $s=\alpha+\beta+1$ przedstawia się następująco.

$$s(s+3)^2(s+5)\geqslant(\alpha-\beta)^2(s^2-7s-24).$$



Pierwszy wynik dotyczący nieujemnej linearyzacji ogólnych wielomianów ortogonalnych należy do Richarda Askey'a. Niech $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie układem wielomianów ortogonalnych względem miary μ. Ponieważ $xp_n(x)$ jest wielomianem stopnia $n+1$ ortogonalnym do każdego z jednomianów 1, $x,\ldots,$ x^{n-2} to

$$xp_n(x)=\gamma_n p_{n+1}+\beta_n p_n(x)+\alpha_n p_{n-1}(x) \tag{2}$$

dla pewnych współczynników α_n, β_n i γ_n. Wzór ten nosi nazwę formuły trójczłonowej. W 1970 Askey [1] udowodnił

Twierdzenie 1 (Askey) *Jeśli β_n i $\alpha_{n+1}\gamma_n$ są ciągami niemalejącymi to wielomiany p_n mają nieujemną linearyzację.*

Zastosujmy ten wynik do wielomianów ultrasferycznych $p_n^{(\alpha,\alpha)}$. Jeśli unormujemy je tak, aby $p_n^{(\alpha,\alpha)}(1)=1$, to spełniają one

$$xp_n^{(\alpha,\alpha)}(x)=\frac{n+2\alpha+1}{2n+2\alpha+1}p_{n+1}^{(\alpha,\alpha)}+\frac{n}{2n+2\alpha+1}p_{n-1}^{(\alpha,\alpha)}.$$

Stwierdzamy, że

$$\beta_n = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \alpha_{n+1}\gamma_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1-4\alpha^2}{4(n+\alpha+1)^2-1}.$$

Zatem ciąg $\alpha_{n+1}\gamma_n$ jest niemalejący wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. To oznacza, że kryterium Askey'a nie obejmuje wielomianów ultrasferycznych dla $-\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, a w szczególności wielomianów Legendre'a. Askey postawił w swojej pracy problem znalezienia ogólnego kryterium, które pociągałoby nieujemną linearyzacje dla $\alpha \geqslant \beta,\ \alpha+\beta+1 \geqslant 0$, lub przynajmniej dla wielomianów Legendre'a, tzn. $\alpha = \beta = 0$.

Następne dwa twierdzenia pochodzące z pracy [5] stanowią rozwiązanie problemu Askey'a.

Twierdzenie 2 *Jeśli ciągi α_n, β_n i $\alpha_n + \gamma_n$ są niemlające oraz $\alpha_n \leqslant \gamma_n$, to wielomiany p_n mają nieujemną linearyzację.*

Twierdzenie 3 *Niech $\beta_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ (to oznacza, że miara μ jest symetryczna względem 0). Jeśli ciągi α_{2n}, α_{2n+1}, $\alpha_{2n} + \gamma_{2n}$ i $\alpha_{2n+1} + \gamma_{2n+1}$ są niemalające oraz $\alpha_n \leqslant \gamma_n$, to wielomiany p_n mają nieujemną linearyzację.*

Zastosujmy Twierdzenie 2 do wielomianów ultrasferycznych, których formuła trójczłonowa była podana wcześniej. Wtedy $\beta_n = 0$ i $\alpha_n + \gamma_n = 1$. Ponadto

$$\alpha_n = \frac{n}{2n+2\alpha+1} \nearrow \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \geqslant -\frac{1}{2}.$$

W klasie wielomianów ultrasferycznych jest to warunek konieczny i wystarczający.

Z kolei Twierdzenie 3 pociąga (choć nie bezpośrednio) nieujemną linearyzację wielomianów Jacobi'ego dla $\alpha \geqslant \beta,\ \alpha+\beta+1 \geqslant 0$. Po szczegóły odsyłamy do [5]. Mimo usiłowań nie udało się znaleźć kryterium, które objełoby również krzywoliniowy trójkąt, o którym wspominaliśmy wcześniej w związku z wynikami Gaspera.

2 Dyskretne zagadnienie brzegowe

W dowodach Twierdzeń 2 i 3 używa się operatorów różnicowych związanych z formułą trójczłonową (2). Niech L oznacza operator działający na ciągach $a = \{a_n\}_{n\geqslant 0}$ według wzoru

$$(La)_n = \gamma_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \alpha_n a_{n-1}, \quad n \geqslant 0.$$

Warto zauważyć, że jeśli przyjmiemy oznaczenie $p(x) = \{p_n(x)\}_{n\geqslant 0}$, to formuła trójczłonowa przybierze postać

$$xp(x) = Lp(x). \tag{3}$$

Niech L_1 i L_2 oznaczają operatory działające na macierzach $u = \{u(n,m)\}_{n,m\geqslant 0}$ jak operator L, ale ze względu na pierwszą lub drugą zmienną traktując pozostała zmienną jako parametr.

Rozważmy zagadnienie brzegowe

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (L_1 - L_2)u & = & 0 \\ u(n,0) & \geqslant & 0 \ \forall n \end{array} \right. \tag{4}$$

Twierdzenie 4 *Przy założeniach Twierdzeń 2 lub 3 rozwiązanie zagadnienia (3) jest nieujemne, tzn.* $u(n,m) \geqslant 0, \ \forall n, m.$

Dowód Twierdzenia 4 można znaleźć w pracy [5]. Pokażemy teraz jak z Twierdzenia 4 wyprowadza się Twierdzenia 2 i 3.

Ustalmy k. Niech $u(n,m) = c(n,m,k)$. Mnożąc obie strony (1) przez $p_k(x)$ i całkując względem μ uzyskamy

$$u(n,m) = \omega_k \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x) p_m(x) p_k(x) d\mu(x),$$

gdzie $\omega_k^{-1} = \int p_k^2(x) d\mu(x)$. Wtedy korzystając z definicji L_1, L_2 i z (4) otrzymujemy

$$(L_1 u)(n,m) = \omega_k \int_{-\infty}^{\infty} (Lp(x))_n p_m(x) p_k(x) d\mu(x) = \omega_k \int_{-\infty}^{\infty} x p_n(x) p_m(x) p_k(x) d\mu(x),$$

$$(L_2 u)(n,m) = \omega_k \int_{-\infty}^{\infty} p_m(x) (Lp(x))_m p_k(x) d\mu(x) = \omega_k \int_{-\infty}^{\infty} x p_n(x) p_m(x) p_k(x) d\mu(x).$$

Zatem

$$(L_1 - L_2)u = 0.$$

Ponadto z ortogonalności mamy

$$u(n,0) = \omega_k \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x) p_k(x) d\mu(x) = \delta_k^n \geqslant 0.$$

Z Twierdzenia 3 otrzymujemy wtedy, że $u(n,m) \geqslant 0$, dla każdych $n, m \in \mathbb{N}$, co kończy dowód.

3 Analiza harmoniczna rozwinięć względem układu $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$

W tej części przyjmujemy, że wielomiany p_n, ortogonalne względem miary μ, mają nieujemną linearyzację. Zakładamy również, że nośnik miary $\operatorname{supp}\mu$ jest ograniczony z góry. Przez analogię z wielomianami Jacobi'ego niech kresem górnym liczb leżących w nośniku miary będzie liczba 1. Wtedy $p_n(1) > 0$. To pozwala unormować wielomiany p_n w punkcie 1 bez zmiany ich znaku, tzn. niech

$$R_n(x) = \frac{p_n(x)}{p_n(1).}$$

Ze wzoru (1) dostajemy

$$R_n(x)R_m(x) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} d(n,m,k)R_k(x), \tag{5}$$

gdzie

$$d(n,m,k) = \frac{p_k(1)}{p_n(1)p_m(1)}c(n,m,k).$$

Współczynniki $d(n,m,k)$ są nieujemne. Podstawiając $x = 1$ w (5) otrzymamy

$$\sum_{k=|n-m|}^{n+m} d(n,m,k) = 1.$$

Niech $\ell^1(\omega_n)$ oznacza przestrzeń ciągów $a = \{a(n)\}_{n\geqslant 0}$, dla których

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a(n)|\omega_n < +\infty.$$

Dla dwu ciągów a i b definiujemy ich splot wzorem

$$a * b(k) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a(n)b(m)d(n,m,k)\omega_n\omega_m.$$

Dla ciągu a określamy jego transformatę $\widehat{a}$ poprzez

$$\widehat{a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)R_n(x)\omega_n.$$

Wtedy $(\ell^1(\omega_n), *)$ staje się algebrą Banacha. Przestrzeń ideałów maksymalnych $\mathcal{M}$ tej algebry można utożsamić z

$$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} : \ |R_n(z)| \leqslant 1 \ \forall n\}.$$

Można pokazać (patrz [6]), że nośnik miary $\operatorname{supp}\mu$ jest zawsze zawarty w $\mathcal{M}$, tzn.

$$|p_n(x)| \leqslant p_n(1) \quad \text{dla} \quad x \in \operatorname{supp}\mu.$$

Innymi słowy na zbiorze $\operatorname{supp}\mu$ kres górny wielomianów p_n przyjmowany jest w prawym końcu nośnika miary. Zbiór $\mathcal{M}$ jest raczej trudno wyznaczyć chyba, że w jakiś sposób udałoby się pokazać, że $\operatorname{supp}\mu = \mathcal{M}$. Tak jest w przypadku wielomianów Jacobi'ego , gdzie $\operatorname{supp}\mu = \mathcal{M} = [-1,1]$. Wtedy na podstawie ogólnej teorii algebr Banacha można wyprowadzić następującą wersję twierdzenia Wienera.

Twierdzenie 5 *Jeśli funkcja*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) R_n^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad \textit{gdzie} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a(n)| < \infty,$$

nie znika w przedziale $[-1,1]$, *to*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) R_n^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad \textit{przy czym} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b(n)| < \infty.$$

W naturalny sposób nasuwa się pytanie, czy równość $\operatorname{supp}\mu = \mathcal{M}$ jest zawsze spełniona. Pewne wyniki sugerujące pozytywną odpowiedź znajdują się w [7]. W pełnej ogólności problem jest nadal otwarty.

Literatura

1. R. Askey, *Linearization of the product of orthogonal polynomials,* Problems in Analysis, R. Gunning, ed., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970, 223-228.

2. R. Askey, *Orthogonal polynomials and special functions,* Regional Conference Series in Applied Mathematics **21**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pensylwania, 1975.

3. G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials, I,* Canad. J. Math. **22** (1970), 171-175,.

4. G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials, II,* Canad. J. Math. **22** (1970), 582-593.

5. R. Szwarc, *Orthogonal polynomials and a discrete boundary value problem I, II,* SIAM J. Math. Anal. **23**(1992), 959-964, 965-969.

6. R. Szwarc, *Convolution structures associated with orthogonal polynomials,* J. Math. Anal. Appl. **170** (1992), 158-170.

7. R. Szwarc *A lower bound for orthogonal polynomials with an application to polynomial hypergroups,* ukaże się w J. Approx. Theory.

Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
pl. Grunwaldzki 2/4
50–384 Wrocław