

SUR L'UNICITÉ FORTE DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE

PAR

MOUNIR ZILI (SOUSSE, TUNISIE)

Abstract. In this paper we prove the pathwise uniqueness of solutions of a stochastic differential equation with a singular drift which depends on time. Our method is of probabilistic nature, and it is based on an Al-Hussaini and Elliott result.

1. Introduction. En dimension 1, on sait d'après les travaux de Nakao [7] et Ouknine [8], qu'il y a unicité forte (cf. Annexe B) des solutions de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$(1) \quad dX(t) = \sigma(t, X(t))dB(t) + \alpha(t, X(t))dt, \quad X(0) = x \in \mathbf{R},$$

où σ et α sont deux applications de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} , mesurables, localement bornées, de plus σ vérifie la condition

$$(2) \quad \begin{cases} \exists \varepsilon < 0 \text{ tel que } 0 < \varepsilon \leq \sigma, \\ 1/\sigma(t, x) = \alpha_1(t, x) - \alpha_2(t, x), \end{cases}$$

où, pour $i = 1, 2$, α_i est une fonction de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} tel que $\forall t \in \mathbf{R}_+$ $\alpha_i(t, \cdot)$ est croissante, $\forall x \in \mathbf{R}$ $\alpha_i(\cdot, x)$ est à variation bornée sur tout compact, et $\forall T > 0, \forall N > 0, \exists L(T, N) > 0$,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \|\alpha_i(\cdot, x)\|_T \leq L(T, N) \quad (1).$$

Par ailleurs, Benabdallah [2] a montré l'unicité forte des solutions de l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} dZ(t) = dB(t) + \beta(t)dL_t^0(Z), \\ Z(0) = z \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

où $L_t^0(Z)$ désigne le temps local symétrique de Z (cf. Annexe A), β est une

(¹) Soit $f(s)$ une fonction définie sur \mathbf{R}_+ à valeurs réelles. $\|f\|_T$ désigne la variation totale de $f(s)$ sur $[0, T]$.

application définie sur \mathbf{R}_+ à valeurs dans $] -1, 1[$, de classe C^1 , qui vérifie: $\mathbf{1}_{\{\beta \geq 0\}}$ est à variation finie, $\inf_{t \geq 0} \beta(t) > -1$ et $\sup_{t \geq 0} \beta(t) < 1$.

Dans le premier paragraphe de cet article, si on suppose que σ et α vérifient des conditions de régularité et de stricte ellipticité adéquates, si β est une application définie sur \mathbf{R}_+ à valeurs dans $] -1, 1[$, vérifiant des propriétés qu'on verra ultérieurement, on montre l'unicité forte des solutions de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dX(t) = \sigma(t, X(t))dB(t) + \alpha(t, X(t))dt + \beta(t)dL_t^0(X), \quad X(0) = x \in \mathbf{R}.$$

La méthode qu'on va suivre, consiste à éliminer le drift singulier en utilisant un lemme dû à Al-Hussaini et Elliott [1], et se ramener à une équation dont les coefficients vérifient les hypothèses du résultat d'Ouknine [8].

Dans \mathbf{R}^d , on sait d'après Benabdallah [2], que si on considère l'équation différentielle stochastique suivante:

$$(4) \quad \begin{cases} dX_i(t) = \sum_{j=1}^d a_{ij}(t, X(t))dB_j(t) + b_i(t, X(t))dt + r_i(t)dL_t^0(X^d), \\ 1 \leq i \leq d, \quad X_i(0) = x_i \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

où a et b sont deux fonctions bornées et continues, vérifiant

$$\sum_{j=1}^d (a_{dj}(t, x))^2 \geq c > 0,$$

et r est une fonction continûment différentiable bornée telle que

$$\sup_{t \geq 0} |r_d(t)| < 1,$$

alors on a l'existence faible d'une solution de (4).

On sait également d'après Mastrangelo et Talbi [5], que si on considère

$$v = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d; x_d < 0\},$$

$$\omega = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d; x_d > 0\},$$

$$S = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d; x_d = 0\},$$

et si on note $L_t^S(X)$ le temps local de la semi-martingale X (cf. Annexe A), alors on a l'existence et l'unicité fortes de la solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$(5) \quad \begin{cases} dX(t) = [C\mathbf{1}_v(X(t)) + D\mathbf{1}_\omega(X(t))]dB(t) + E dL_t^S(X), \\ X(0) = x \in \mathbf{R}^d, \end{cases}$$

où C , D , et E sont trois constantes vérifiant: $C > 0$, $D > 0$ et $|E| < 1$. Le but du deuxième paragraphe est de démontrer dans une première étape un théorème

d'unicité forte des solutions des équations du type (4), où les coefficients s'écrivent sous la forme:

$$a = a^1 \mathbf{1}_v + a^2 \mathbf{1}_\omega, \quad b = b^1 \mathbf{1}_v + b^2 \mathbf{1}_\omega$$

et

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_d(t)).$$

Dans une deuxième étape, on en déduira l'existence et l'unicité fortes des solutions de ces équations sous des conditions supplémentaires de bornitude et de non-dégénérescence adéquates.

Ce travail généralise le résultat de Mastrangelo et Talbi [5], et en un sens celui de Benabdallah [2].

2. Etude en dimension 1. Dans ce travail, β est une application définie sur \mathbf{R}_+ à valeurs dans $] -1, +1[$, de classe C^1 , qui vérifie: $\inf_{t \geq 0} \beta(t) > -1$ et $\sup_{t \geq 0} \beta(t) < 1$.

On note \mathbf{R}_+^* (resp. \mathbf{R}_-^*) l'ensemble \mathbf{R}_+ (resp. \mathbf{R}_-) privé de 0.

DÉFINITION. Nous disons que f est de classe $C^{n,m}$ sur $\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-^*}$ (resp. sur $\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*}$) si, pour tout entier $k \leq n$ (resp. pour tout entier $h \leq m$),

$$\frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{d^h}{dt^h} \right] f$$

admet une restriction

$$\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-^*} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{d^h}{dt^h} \right] f \quad \left(\text{resp. } \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{d^h}{dt^h} \right] f \right)$$

qui se prolonge continûment sur $\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-^*}$ (resp. $\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*}$) en une fonction que nous noterons

$$\mathbf{1}_{\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-^*}} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{d^h}{dt^h} \right] f \quad \left(\text{resp. } \mathbf{1}_{\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*}} \frac{d^k}{dx^k} \left[\frac{d^h}{dt^h} \right] f \right).$$

DÉFINITION DE LA FONCTION σ . Soit σ une application de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} définie par

$$\forall t \geq 0, \forall y \in \mathbf{R}, \sigma(t, y) = \sigma^1(t, y) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_-^*}(y) + \sigma^2(t, y) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(y),$$

où $\sigma^1(t, y)$ et $\sigma^2(t, y)$ sont deux applications $C^{1,1}$ sur $\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_-^*}$ et sur $\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*}$, admettant des dérivées secondes "mixtes"

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \sigma^2$$

continues en (t, x) , et telles qu'il existe une constante λ_1 pour laquelle: $\forall t \geq 0, \forall y \in \mathbf{R}$, et pour $k = 1, 2, 0 < \lambda_1 \leq \sigma^k(t, y)$.

DÉFINITION DE LA FONCTION α . Soit α une application de $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} définie par

$$\forall t \geq 0, \forall y \in \mathbf{R}, \alpha(t, y) = \alpha^1(t, y) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(y) + \alpha^2(t, y) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^-}(y),$$

où $\alpha^1(t, y)$ et $\alpha^2(t, y)$ sont deux applications mesurables et localement bornées.

DÉFINITION. Pour u et v deux fonctions de classe C^1 définies sur \mathbf{R}_+ à valeurs dans \mathbf{R}_+ vérifiant $\inf_{t \geq 0} u(t) > 0$ et $\inf_{t \geq 0} v(t) > 0$, on définit:

1. La fonction $\phi_{u,v}$ par:

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}, \phi_{u,v}(t, x) = \begin{cases} v(t)x & \text{si } x \geq 0, \\ u(t)x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. Pour tout $t \geq 0$, la fonction $\phi_{u(t),v(t)}$ par:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \phi_{u(t),v(t)}(x) = \phi_{u,v}(t, x).$$

Remarque. Pour tout $t \geq 0$, $\phi_{u(t),v(t)}$ est une transformation bijective, qui admet pour fonction inverse

$$\phi_{u(t),v(t)}^{-1}(x) = \phi_{(u(t))^{-1},(v(t))^{-1}}(x) = \begin{cases} (v(t))^{-1}x & \text{si } x \geq 0, \\ (u(t))^{-1}x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. On a l'unicité forte des solutions de l'équation différentielle stochastique

$$(6) \quad \begin{cases} dX(t) = \sigma(t, X(t))dB(t) + \alpha(t, X(t))dt + \beta(t)dL_t^0(X), \\ X(0) = x. \end{cases}$$

Avant de démontrer ce théorème, il nous est utile de faire l'étude préliminaire suivante:

LEMME 2.2 (dû à Al-Hussaini et Elliott). Soit $F = F(t, x)$ une fonction définie sur $[0, +\infty[\times \mathbf{R}$ à valeurs réelles, qui est continûment différentiable en t , et absolument continue en x avec $\partial F/\partial x$ localement bornée. De plus, on suppose que $F(t, 0) = 0$, pour que pour tout $t \geq 0$,

$$F(t, x) = \int_0^x \frac{\partial F}{\partial x}(t, y) dy.$$

On suppose également, que pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \int_0^x \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(t, y) dy$$

avec $\partial^2 F/(\partial t \partial x)$ localement bornée. Alors pour toute semi-martingale continue

X à valeurs réelles, si on note $L_t^{*a}(X)$ le temps local à droite de X (cf. Annexe A), on a

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= F(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, X(s)) ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X(s)) dX(s) - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial F}{\partial x}(t, a) dL_t^{*a}(X) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial x}(s, a) dL_s^{*a} ds. \end{aligned}$$

Remarques. Puisque le temps local à droite de la semi-martingale X admet une version c.a.d.l.a.g. en a et continue en t , on prendra toujours cette version dans la suite. De plus, on a le résultat suivant entre les deux temps locaux:

$$(7) \quad L_t^a = (L_t^{*a} + L_t^{*a-})/2,$$

où L_t^{*a-} désigne la limite à gauche de L_t^{*a} : $L_t^{*a-} = \lim_{b < a} L_t^{*b}$.

PROPOSITION 2.3. Si on note

$$Z(t) = \phi_{u,v}(t, X(t)), \quad \text{où } u \equiv 1 \text{ et } v(s) = \frac{1 - \beta(s)}{1 + \beta(s)},$$

alors Z vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$(8) \quad \begin{cases} dZ(t) = G(t, Z(t)) dB(t) + H(t, Z(t)) dt, \\ Z(0) = z = \phi_{1,v}(0, x), \end{cases}$$

où

$$G(t, y) = \sigma^1(t, y) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(y) + \sigma^2\left(t, \frac{1 + \beta(t)}{1 - \beta(t)} y\right) \frac{1 - \beta(t)}{1 + \beta(t)} \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(y)$$

et

$$H(t, y) = \alpha^1(t, y) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(y) + \left(\alpha^2\left(t, \frac{1 + \beta(t)}{1 - \beta(t)} y\right) \frac{1 - \beta(t)}{1 + \beta(t)} - \frac{2\beta'(t)}{1 - \beta^2(t)} y \right) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(y).$$

Démonstration. Remarquons que $\phi_{u,v}$ est continûment différentiable en t et vérifie les hypothèses du lemme 2.2. Donc Z vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \phi_{u,v}(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial s}(s, X(s)) ds + \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(s, X(s)) dX(s) \\ &- \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(t, a) dL_t^{*a}(X) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial^2 \phi_{u,v}}{\partial s \partial x}(s, a) dL_s^{*a} ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \phi_{u,v}(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial s}(s, X(s)) ds \\
&+ \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(s, X(s)) \alpha(s, X(s)) ds + \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(s, X(s)) \sigma(s, X(s)) dB(s) \\
&+ \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(s, X(s)) \beta(s) dL_s^0(X) - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(t, a) dL_t^{*a}(X) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial^2 \phi_{u,v}}{\partial s \partial x}(s, a) dL_s^{*a} ds.
\end{aligned}$$

Commençons par le calcul des trois dernières integrales:

$$\frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(t, x) = u(t) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(x) + v(t) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(x) + \frac{1}{2} [u(t) + v(t)] \mathbf{1}_{\{0\}}(x).$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(s, X(s)) \beta(s) dL_s^0(X) = \frac{1}{2} \int_0^t \beta(s) [u(s) + v(s)] dL_s^0(X), \\
I_2 &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(t, a) dL_t^{*a}(X) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 u(t) dL_t^{*a}(X) - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} v(t) dL_t^{*a}(X) \\
&\quad - \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\{0\}}(a) [u(t) + v(t)] dL_t^{*a}(X) \\
&= -\frac{1}{2} u(t) L_t^{*0-}(X) + \frac{1}{2} v(t) L_t^{*0}(X) - \frac{1}{4} [u(t) + v(t)] (L_t^{*0}(X) - L_t^{*0-}(X)).
\end{aligned}$$

Et en utilisant la relation (7), on voit que $I_2 = \frac{1}{2} [v(t) - u(t)] L_t^0(X)$.

D'autre part:

$$\frac{\partial^2 \phi_{u,v}}{\partial t \partial x}(t, x) = u'(t) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(x) + v'(t) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(x) + \frac{1}{2} [u'(t) + v'(t)] \mathbf{1}_{\{0\}}(x).$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial^2 \phi_{u,v}}{\partial s \partial x}(s, a) dL_s^{*a} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} v'(s) dL_s^{*a} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^0 u'(s) dL_s^{*a} ds \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{4} [u'(s) + v'(s)] \mathbf{1}_{\{0\}}(a) dL_s^{*a} ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(u'(s) L_s^{*0-} - v'(s) L_s^{*0} + \frac{1}{2} [u'(s) + v'(s)] [L_s^{*0} - L_s^{*0-}] \right) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t (u'(s) - v'(s)) L_s^0(X) ds \\
&= \frac{1}{2} [u(t) - v(t)] L_t^0(X) + \frac{1}{2} \int_0^t (v(s) - u(s)) L_s^0(X) ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2} \int_0^t [\beta(s)(u(s) + v(s)) - (u(s) - v(s))] dL_s^0.$$

Et puisque

$$u \equiv 1 \quad \text{et} \quad v(s) = \frac{1 - \beta(s)}{1 + \beta(s)},$$

il est clair que $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

Par suite:

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \phi_{u,v}(0, x) + \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial s}(s, X(s)) ds \\
&\quad + \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(s, X(s)) \alpha(s, X(s)) ds + \int_0^t \frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial x}(s, X(s)) \sigma(s, X(s)) dB(s).
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial \phi_{u,v}}{\partial s}(s, x) = v'(s) x \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} + u'(s) x \mathbf{1}_{\{x < 0\}},$$

donc

$$\frac{\partial \phi_{1,v}}{\partial s}(s, x) = v'(s) x \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}},$$

et

$$\frac{\partial \phi_{1,v}}{\partial s}(s, X(s)) = \frac{\partial \phi_{1,v}}{\partial s}(s, \phi_{1,v(s)}^{-1}(Z(s))) = v'(s) \phi_{1,1/v(s)}(Z(s)) \mathbf{1}_{R_+}(Z(s)).$$

D'autre part,

$$v'(s) = \frac{-2\beta'(s)}{(1 + \beta(s))^2},$$

donc

$$\frac{\partial \phi_{1,(1-\beta)/(1+\beta)}}{\partial s}(s, X(s)) = -Z(s) \frac{2\beta'(s)}{1 - \beta^2(s)} \mathbf{1}_{R_+}(Z(s)).$$

Et en remplaçant

$$\frac{\partial \phi_{1,(1-\beta)/(1+\beta)}}{\partial s}(s, X(s)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_{1,(1-\beta)/(1+\beta)}}{\partial x}(s, X(s))$$

par leurs valeurs dans les trois in intégrales, on trouve le résultat. ■

Démonstration du théorème 2.1. Remarquons tout d'abord, que pour prouver le théorème, il suffit de montrer qu'on a l'unicité forte des solutions de l'équation (8).

Or d'après les hypothèses, H et G sont deux applications mesurables et localement bornées. Donc, d'après les travaux de Nakao [7] et d'Ouknine [8], pour obtenir le résultat, il suffit de montrer la condition (2). D'autre part, d'après les hypothèses on a $0 < \lambda_1 \leq \sigma^k(t, y)$ pour $k = 1, 2$. Et puisque

$$0 < \frac{1 - \sup_{t \geq 0} \beta(t)}{1 + \sup_{t \geq 0} \beta(t)} < \frac{1 - \beta(t)}{1 + \beta(t)} < \frac{2}{1 + \inf_{t \geq 0} \beta(t)},$$

on conclut que

$$G(t, y) \geq \lambda_1 \frac{1 - \sup_{t \geq 0} \beta(t)}{1 + \sup_{t \geq 0} \beta(t)} = \varepsilon > 0.$$

Comme $\sigma^1(t, y)$ et $\sigma^2(t, y)$ sont de plus de classe $C^{1,1}$ sur $\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*}$ et sur $\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*}$, et comme β est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, les fonctions

$$\mathbf{1}_{\overline{\mathbb{R}_-}}(y) \frac{1}{G(t, y)} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\overline{\mathbb{R}_+}}(y) \frac{1}{G(t, y)}$$

sont continues et continûment dérivables en t et en y sur $\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*}$ et sur $\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*}$.

On écrit $1/G(t, y)$ sous la forme

$$\frac{1}{G(t, y)} = \frac{1}{G(t, 0_{\text{sg}(y)})} + \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{G(t, u)} \right) \right]^+ du - \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{G(t, u)} \right) \right]^- du,$$

où, pour toute fonction f , on note $f^- = -(f \wedge 0)$ et $f^+ = (f \vee 0)$,

$$\text{sg}(y) = \begin{cases} + & \text{si } y \geq 0, \\ - & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

$$G(t, 0_{\text{sg}(y)}) = \begin{cases} \lim_{u \searrow 0} G(t, u) & \text{si } y \geq 0, \\ \lim_{u \nearrow 0} G(t, u) & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Deux cas sont possibles:

Ou bien

$$\frac{1}{G(t, 0^+)} \geq \frac{1}{G(t, 0^-)};$$

nous posons alors

$$\alpha_1(t, y) = \frac{1}{G(t, 0_{\text{sg}(y)})} + \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{G(t, u)} \right) \right]^+ du$$

et

$$\alpha_2(t, y) = \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{G(t, u)} \right) \right]^- du.$$

Ou bien

$$\frac{1}{G(t, 0^+)} < \frac{1}{G(t, 0^-)};$$

nous posons alors

$$\alpha_1(t, y) = \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{G(t, u)} \right) \right]^+ du$$

et

$$\alpha_2(t, y) = \frac{-1}{G(t, 0_{sg(y)})} + \int_0^y \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{G(t, u)} \right) \right]^- du.$$

Dans les deux cas nous obtenons $1/G(t, y)$ sous la forme

$$\frac{1}{G(t, y)} = \alpha_1(t, y) - \alpha_2(t, y).$$

On voit que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $y \mapsto \alpha_i(t, y)$ est croissante (au sens large) en y .
On voit également que puisque

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{G(t, u)} \right)$$

est continue en (t, u) sur $\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*}$ et sur $\overline{\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*}$, pour tout $y \in \mathbf{R}$, $t \mapsto \alpha_i(t, y)$ est localement à variation bornée, et pour tout $T \in \mathbf{R}_+$ et tout $N \in \mathbf{R}_+$ il existe une constante $L(T, N)$ telle que, pour y appartenant à $[-N, N]$, la variation totale de $(t \mapsto \alpha_i(t, y))$ sur $[0, T]$ vérifie

$$\|\alpha_i(\cdot, y)\|_T \leq L(T, N).$$

Et le théorème est démontré. ■

3. Etude en dimension d . On note $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_d(t))$ le mouvement brownien en dimension d , et r une application définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbf{R}^d , définie par:

$$\forall t \in [0, +\infty[, r(t) = (r_1(t), \dots, r_d(t)),$$

où pour $1 \leq i \leq d-1$, r_i est une application de $[0, +\infty[$ à valeurs réelles, r_d est une application de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, qui vérifie: $\inf_{t \geq 0} r_d(t) > -1$ et $\sup_{t \geq 0} r_d(t) < 1$.

DÉFINITION (généralisation de la fonction $\phi_{u,v}$ introduite dans le paragraphe 2). Pour u et v deux fonctions de classe C^1 définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ vérifiant $\inf_{t \geq 0} u(t) > 0$ et $\inf_{t \geq 0} v(t) > 0$, on définit la fonction $F_{u,v}$ par:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d,$$

$$\begin{aligned} F_{u,v}(t, x) &= (x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, \phi_{u,v}(t, x_d)) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, v(t)x_d^+ - u(t)x_d^-). \end{aligned}$$

DÉFINITION. Soit a une application de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^d$ dans l'espace des matrices à d lignes et d colonnes définie par:

$$\forall y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0, +\infty[,$$

$$a(t, y) = a^1(t, y) \mathbf{1}_v(y) + a^2(t, y) \mathbf{1}_{\bar{v}}(y)$$

$$= (a_{ij}(t, y))_{1 \leq i, j \leq d} = \begin{pmatrix} & a_{1d}(t, y) & & \\ c(t, y) & \vdots & & \\ & a_{d-1,d}(t, y) & & \\ 0 \dots 0 & & a_{dd}(t, y) & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & a_{1d}^1(t, y) & & \\ c^1(t, y) & \vdots & & \\ & a_{d-1,d}^1(t, y) & & \\ 0 \dots 0 & & a_{dd}^1(t, y) & \end{pmatrix} \mathbf{1}_v(y) + \begin{pmatrix} & a_{1d}^2(t, y) & & \\ c^2(t, y) & \vdots & & \\ & a_{d-1,d}^2(t, y) & & \\ 0 \dots 0 & & a_{dd}^2(t, y) & \end{pmatrix} \mathbf{1}_{\bar{v}}(y),$$

telle que:

- pour $k = 1, 2$ et $1 \leq i \leq d-1$, les a_{ia}^k sont des applications de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} , mesurables;

- a_{da}^1 et a_{da}^2 sont de classe $C^{1,1}$ sur $\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*}$ et sur $\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*}$, admettant des dérivées secondes "mixtes"

$$\frac{\partial^2 a_{da}^1}{\partial t \partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 a_{da}^2}{\partial t \partial x}$$

continues en (t, x) , telles qu'il existe une constante λ_1 pour laquelle: $\forall t \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}$, et pour $k = 1, 2, 0 < \lambda_1 \leq a_{da}^k(t, y)$;

- pour $k = 1, 2, 1 \leq i \leq d-1$ et $1 \leq j \leq d-1$, les c_{ij}^k sont des applications de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} , mesurables, qui vérifient: $\forall t \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^d$, $c(t, \phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(y_d))$ est inversible.

DÉFINITION. Soit b une application de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^d$ dans \mathbb{R}^d définie par:

$$\forall y = (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \forall t \in [0, +\infty[,$$

$$b(t, y) = b^1(t, y) \mathbf{1}_v(y) + b^2(t, y) \mathbf{1}_{\bar{v}}(y) = (b_j(t, y))_{1 \leq j \leq d},$$

où pour tout $1 \leq j \leq d-1$, b_j^1 et b_j^2 (resp. b_d^1 et b_d^2) sont deux applications de $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} , mesurables (resp. deux applications mesurables et localement bornées).

Le théorème principal de ce paragraphe est le suivant:

THÉORÈME 3.1. *S'il existe une solution $Y(t)$ de l'équation différentielle stochastique suivante:*

$$(9) \quad \begin{cases} dY(t) = a(t, Y(t))dB(t) + b(t, Y(t))dt + r(t)dL_t^S(Y), \\ Y(0) = y = (y_1, y_2, \dots, y_d), \end{cases}$$

alors elle est unique au sens fort.

On verra que, de ce théorème, on peut déduire le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3.2. *En notant*

$$A(t, y) = \begin{pmatrix} (a_{ij}(t, \phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(y_d)))_{\substack{1 \leq i \leq d-1 \\ 1 \leq j \leq d}} \\ 0 \dots 0 \quad G_d(t, y_d) \end{pmatrix},$$

où

$$G(t, y_d) = a_{dd}^1(t, y_d) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y_d) + a_{dd}^2 \left(t, \frac{1+r_d(t)}{1-r_d(t)} y_d \right) \frac{1-r_d(t)}{1+r_d(t)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y_d),$$

si les applications a_{ij} et b_i sont mesurables et bornées, pour $1 \leq i \leq d-1$, $r_i \equiv 0$, l'application r_d est constante, et si on a la propriété de non-dégénérescence suivante:

$$(10) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}^d, \xi^* A(t, y) \xi \geq \lambda |\xi|^2$$

pour un $\lambda > 0$, alors on a l'existence et l'unicité fortes de la solution de l'équation (9).

Remarque. Les hypothèses, plus faibles du théorème, ne permettent pas d'établir l'existence qui doit être postulée.

UN EXEMPLE D'APPLICATION. Dans de nombreux problèmes physiques, on se ramène souvent à l'étude de la fonction $u(x, t) = E(f(X_x(t)))$, où f est une fonction régulière par morceaux et bornée, $X_x(t)$ est un processus stochastique défini par l'équation différentielle stochastique suivante:

$$(11) \quad \begin{cases} dX_x(t) = \sigma(X_x(t))dB(t) + \alpha(X_x(t))dt + r dL_t^S(X_x), \\ X_x(0) = x, \end{cases}$$

où $r = (0, \dots, 0, r_d) \in \{0\}^{d-1} \times]-1, 1[$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $\sigma(y) = (\sigma_{ij}(y))_{1 \leq i, j \leq d}$ est une matrice de dimension d telle que: si $i \neq j$, $\sigma_{ij} \equiv 0$, et

$$\forall 1 \leq i \leq d, \forall y \in \mathbb{R}^d, \sigma_{ii}(y) = \sigma_i^1(y) \mathbf{1}_v(y) + \sigma_i^2(y) \mathbf{1}_{\bar{v}}(y);$$

σ_i^1 et σ_i^2 sont des constantes strictement positives, et $\alpha(y) = (\alpha_j(y))_{1 \leq j \leq d}$ est un vecteur de \mathbb{R}^d tel que

$$\forall 1 \leq j \leq d, \forall y \in \mathbb{R}^d, \alpha_j(y) = \alpha_j^1(y) \mathbf{1}_v(y) + \alpha_j^2(y) \mathbf{1}_{\bar{v}}(y),$$

où α_j^1 et α_j^2 sont des constantes réelles (cf. [5] et [6]). Le corollaire, nous donne alors l'existence et l'unicité fortes de la solution de l'équation (11).

Démonstration du théorème 3.1. Soit

$$Z(t) = F_{1, [1-r_d(t)]/[1+r_d(t)]}(t, Y(t)) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_d(t)).$$

Si on note

$$H_d(t, y_d) = \alpha_d^1(t, y_d) \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+(y_d)} + \left[\alpha_d^2 \left(t, \frac{1+r_d(t)}{1-r_d(t)} y_d \right) \frac{1-r_d(t)}{1+r_d(t)} - \frac{2r'_d(t)}{1-r_d^2(t)} y_d \right] \mathbf{1}_{\mathbf{R}^+(y_d)},$$

d'après la proposition 2.3 et le théorème 2.1, il est clair que Z_d est l'unique solution (au sens fort) de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$(12) \quad \begin{cases} dZ_d(t) = G_d(t, Z_d(t)) dB_d(t) + H_d(t, Z_d(t)) dt, \\ Z_d(0) = z_d = \phi_{1, [1-r_d(0)]/[1+r_d(0)]}(0, y_d). \end{cases}$$

Il est clair également, que pour tout $1 \leq i \leq d-1$, Z_i vérifie l'équation suivante:

$$(13) \quad \begin{cases} dZ_i(t) = \sum_{j=1}^d \gamma_{i,j}(t, Z_d(t)) dB_j(t) + \xi_i(t, Z_d(t)) dt, \\ \quad \quad \quad + r_i(t) dL_i^0(\phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(\cdot, Z_d)), \\ Z_i(0) = z_i, \end{cases}$$

où pour tout $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}_+$, $1 \leq i \leq d-1$ et $1 \leq j \leq d$,

$$\gamma_{i,j}(t, x) = a_{i,j}(t, \phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(x))$$

et

$$\xi_i(t, x) = b_i(t, \phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(x)).$$

Donc, si on note $\zeta = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{d-1})$, $B^* = (B_1, B_2, \dots, B_{d-1})$, pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbf{R}$,

$$\Gamma(t, x) = (\gamma_{i,j}(t, x))_{1 \leq i, j \leq d-1}, \quad \tilde{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_{d-1}(t)),$$

$$\Sigma(t, x) = \begin{bmatrix} \gamma_{1,d}(t, x) \\ \vdots \\ \gamma_{d-1,d}(t, x) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \psi(t, x) = \begin{bmatrix} \xi_1(t, x) \\ \vdots \\ \xi_{d-1}(t, x) \end{bmatrix},$$

alors ζ vérifie l'équation suivante:

$$d\zeta(t) = \Gamma(t, Z_d(t)) dB^*(t) + \Sigma(t, Z_d(t)) dB_d(t) + \psi(t, Z_d(t)) dt + \tilde{r}(t) dL_i^0(\phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(\cdot, Z_d)).$$

Or d'après les hypothèses, Γ est inversible, donc on obtient:

$$dB^*(t) = \Gamma^{-1}(t, Z_d(t)) d\zeta(t) - \Gamma^{-1}(t, Z_d(t)) \Sigma(t, Z_d(t)) dB_d(t) \\ - \Gamma^{-1}(t, Z_d(t)) \psi(t, Z_d(t)) dt - \Gamma^{-1}(t, Z_d(t)) \tilde{r}(t) dL_t^0(\phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(\cdot, Z_d)).$$

Et par suite, si ζ et $\tilde{\zeta}$ sont deux solutions de l'équation ci-dessus, définies sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, F, P, (F_t)_{t \geq 0})$ et pour le même brownien $B^*(t)$ (cf. Annexe B), elles vérifient:

$$\Gamma^{-1}(t, Z_d(t)) d\zeta(t) = \Gamma^{-1}(t, Z_d(t)) d\tilde{\zeta}(t).$$

Donc, si $\zeta(0) = \tilde{\zeta}(0)$ *P*-p.s., on a

$$\zeta(t) - \tilde{\zeta}(t) = \int_0^t d(\zeta(s) - \tilde{\zeta}(s)) \\ = \int_0^t \Gamma(s, Z_d(s)) \Gamma^{-1}(s, Z_d(s)) d(\zeta(s) - \tilde{\zeta}(s)) = 0,$$

d'où le résultat. ■

Démonstration du corollaire 3.2. Remarquons tout d'abord, que la propriété de non-dégénérescence (10), implique que pour tout $t > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $c(t, \phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(y_d))$ est inversible. D'autre part, puisque Z vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$(14) \quad dZ(t) = A(t, Z(t)) dB(t) + B(t, Z(t)) dt$$

avec

$$B(t, y) = \begin{bmatrix} b_1(t, \phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(y_d)) \\ \vdots \\ b_{d-1}(t, \phi_{1, [1+r_d(t)]/[1-r_d(t)]}(y_d)) \\ H_d(t, y_d) \end{bmatrix},$$

les applications a_{ij} et b_i sont mesurables et bornées, et A vérifie la propriété (10), d'après Krylov [4] l'équation (14) admet une solution faible. Et puis d'après le théorème 3.1, on a l'unicité forte, d'après Watanabe et Yamada [10], on a l'existence forte de la solution de (14), ce qui achève la démonstration du corollaire. ■

Annexe A. Soit (Ω, F, F_t, P) un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles et $B = (B(t))_{t \geq 0}$ un mouvement brownien linéaire sur cet espace. Pour toute semi-martingale continue $X = (X(t))_{t \geq 0}$, on définit par la formule de Tanaka le temps local symétrique qu'on note L_t^a ($a \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$) (respectivement le temps local à droite qu'on note L_t^{*a}) par

$$|X(t) - a| = |X(0) - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X(s) - a) dX(s) + L_t^a(X)$$

avec

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Respectivement,

$$|X(t) - a| = |X(0) - a| + \int_0^t \overline{\operatorname{sgn}}(X(s) - a) dX(s) + L_t^{*a}(X)$$

avec

$$\overline{\operatorname{sgn}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En dimension d , si S est une variété de classe C^2 de dimension $d-1$, on définit le temps local d'une semi-martingale continue X en S par

$$L_t^S(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_0^t \mathbf{1}_{B(S, \varepsilon)} [X(s)] d\langle X \cdot n, X \cdot n \rangle_s,$$

où $B(S, \varepsilon)$ désigne la boule de centre S et de rayon ε :

$$B(S, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d; d(y, S) < \varepsilon\},$$

n la normale à S , $X \cdot n$ le produit scalaire des vecteurs X et n , et $\langle X \cdot n, X \cdot n \rangle$ la covariance (ou le crochet) de la semi-martingale $X \cdot n$ (cf. [3], [5] et [9]).

Dans le cas particulier où $S = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_d); y_d = 0\}$,

$$L_t^S(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} \int_0^t \mathbf{1}_{B(S, \varepsilon)} [X(s)] d\langle X_d, X_d \rangle_s.$$

Annexe B. Une solution faible (ou en loi) de

$$(15) \quad [dX(t) = \sigma(t, X(t))dB(t) + \alpha(t, X(t))dt + \beta(t)dL_t^0(X)]^{(2)},$$

est un espace filtré $(\Omega, F, \mathbf{P}, (F_t)_{t \geq 0})$ vérifiant les conditions habituelles et un processus $\tilde{X}(t) = (X(t), B(t))$ tels que:

- $X(t)$ est F_t -adapté et $B(t)$ est un F_t -mouvement brownien, $B(0) = 0$;
- $X(t)$ est continu en t , \mathbf{P} -p.s.;
- l'équation (15) a lieu pour tout t , \mathbf{P} -p.s.;

La solution $X(t)$ est dite *forte* si, de plus:

- l'espace $(\Omega, F, \mathbf{P}, (F_t)_{t \geq 0})$ est fixé;

(²) $L_t^0(X)$ désigne le temps local de X en 0 (cf. Annexe A), σ , α et β sont trois fonctions (par exemple vérifiant les hypothèses du théorème 2.1).

• pour tout t , $Y(t)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $Y(0)$ et $\{B(s); s \leq t\}$.

On dit qu'une solution faible de (15) est *unique au sens faible* (ou *en loi*) si, pour deux solutions faibles

$$(\Omega, F, P, (F_t)_{t \geq 0}, X(t), B(t)) \quad \text{et} \quad (\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P}, (\tilde{F}_t)_{t \geq 0}, \tilde{X}(t), \tilde{B}(t))$$

vérifiant $X(0) = \tilde{X}(0)$, pour tout t , la loi de $X(t)$ est égale à la loi de $\tilde{X}(t)$.

On dit qu'une solution (faible ou forte) de (15) est *unique au sens fort* (ou *unique au sens trajectoriel*) si, pour deux solutions, définies sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, F, P, (F_t)_{t \geq 0})$ et pour le même brownien $B(t)$, on a

$$X(0) = \tilde{X}(0) \text{ P-p.s.} \Rightarrow P(\{\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \tilde{X}(t)| = 0\}) = 1.$$

En dimension $d \geq 1$ on a les mêmes définitions, sauf qu'on remplace $L_t^0(X)$ par $L_t^S(X)$, où S est une variété de classe C^2 de dimension $d-1$, $X(t)$ et $B(t)$ deviennent des vecteurs de \mathbb{R}^d .

TRAVAUX CITÉS

- [1] A. N. Al-Hussaini and R. J. Elliott, *An extension of the Itô differentiation formula*, *Nogoya Math. J.* 105 (1987), pp. 9-19.
- [2] M. Benabdallah, *Equations différentielles stochastiques avec drift singulier: Problèmes d'existence, d'unicité et développement asymptotique en temps petits lorsque les coefficients sont réguliers par morceaux*, Thèse de troisième cycle, Paris VI, 1989.
- [3] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland, 1981.
- [4] N. V. Krylov, *Some estimates of the probability density of stochastic integrals*, *Izv. Akad. Nauk SSSR* 8, No. 1 (1974), pp. 233-254.
- [5] M. Mastrangelo et M. Talbi, *Mouvements browniens asymétriques modifiés en dimension finie et opérateurs différentiels à coefficients discontinus*, *Probab. Math. Statist.* 11 (1990), pp. 47-78.
- [6] V. Mastrangelo, *Résolution stochastique de systèmes d'équations aux dérivées partielles du type parabolique affine et applications physiques*, *Bulletin de la direction des études et recherches*, Série C.E.D.F.
- [7] S. Nakao, *On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equation*, *Osaka J. Math.* 9 (1972), pp. 513-515.
- [8] Y. Ouknine, *Fonctions de semi-martingales et applications aux équations différentielles stochastiques*, *Stochastics and Stochastic Reports* 28, pp. 115-122.
- [9] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, 2nd edition, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1994.
- [10] S. Watanabe and T. Yamada, *On the uniqueness of solution of stochastic differential equations. II*, *J. Math. Kyoto Univ.* 11 (1971), pp. 553-563.
- [11] M. Zili, *Développement asymptotique en temps petits de la solution d'une équation aux dérivées partielles de type parabolique*, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I*, 321 (1995), pp. 1049-1052.

- [12] — *Construction d'une solution fondamentale d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants par morceaux*, à paraître au Bull. Sci. Math. de Paris, Vol. 2 (1999), et prépublication 79 (1996) de l'U.M.R. 9994 du C.N.R.S. (Université Paris 6).

Ecole Préparatoire aux Académies Militaires (D.E.U.)
Rue du Maréchal Tito
4029 Sousse, Tunisie

Received on 3.1.1997;
revised version on 23.2.1998
