PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS
Vol. 13, Fasc. 1 (1992), pp. 1–5

RÉGULARITÉ DE FONCTIONS ALÉATOIRES GAUSSIENNES À VALEURS DANS l_∞

PAR

X. FERNIQUE (STRASBOURG)

Abstract. The problem when gaussian functions with values in non-separable l_∞ space have a continuous modification is studied. This problem was presented during the Probability Semester in the International Stefan Banach Center, Warsaw, May 1990.

1. NOTATIONS, ENONCÉS DU PROBLÈME ET DES RÉSULTATS

1.1. Un problème de régularité. On étudie des fonctions aléatoires $X = (X_n, n \in N)$ sur R à valeurs dans R^N ayant la forme suivante:

(1.1.1) $$X_n(t) = a_n x_n(b_n t), \quad t \in R, \; n \in N,$$

où $(a_n) \subset R^+$, $(b_n) \subset R^+$, et où $(x_n, n \in N)$ est une suite indépendante et équidistribuée de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires réelles sur R à trajectoires continues.

On cherche à quelles conditions:

(1.1.2) X a presque toutes ses trajectoires continues dans l'espace de Banach non séparable et donc non lusinien l_∞.

Pour manier la loi commune des x_n, on utilisera la fonction positive φ définie sur R^+ par

(1.1.3) $$\varphi^2(t) = E|x_1(t) - x_1(0)|^2.$$

1.2. Des rappels. Dans un travail précédent [1], on a étudié les modifications de X ayant leurs trajectoires continues dans certains espaces lusiniens; introduisant pour cela l'hypothèse supplémentaire suivante:

(1.2.1) La fonction φ est croissante sur R^+ et non identiquement nulle,

on a constaté que:

(1.2.2) Si la propriété (1.2.1) est vérifiée, la fonction aléatoire X de la forme (1.1.1) a une modification continue dans c_0 si et seulement si

(a) pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum \exp\{-\varepsilon^2/a_n^2\}$ converge,

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n [\log^+ b_n]^{1/2} = 0$.

On remarquera que la condition (a) exprime que $X(0)$ est p.s. dans c_0 alors que (b) exprime plus particulièrement la continuité.

(1.2.3) Si la propriété (1.2.1) est vérifiée, la fonction aléatoire X de la forme (1.1.1) a une modification continue dans l_∞ muni de la topologie affaiblie et lusinienne $\sigma(l_\infty, l_1)$ si et seulement si

(a) il existe un nombre $M > 0$ tel que la série $\sum \exp\{-M^2/a_n^2\}$ converge,

(b) $\sup_{n\in N} a_n[\log^+ b_n]^{1/2} < \infty$.

Les énoncés (1.2.2) et (1.2.3) montrent en particulier que l'existence d'une modification continue de X, dans les espaces considérés et sous l'hypothèse (1.2.1), est fixée par les coefficients (a_n) et (b_n) et même par les seuls coefficients (a_n) si la suite (b_n) est bornée; elle est alors indépendante de la loi commune des x_n. Dans [1], ce fait apparaissait étroitement lié par les techniques utilisées au caractère lusinien de ces espaces.

1.3. La solution du problème. Le problème proposé ci-dessus est résolu par les énoncés suivants:

Théorème 1.3.1. *Soit X une fonction aléatoire de la forme* (1.1.1) *et vérifiant l'hypothèse* (1.2.1). *On suppose que X possède la propriété* (1.1.2). *Dans ces conditions, les deux propriétés suivantes sont aussi vérifiées*:

(a) *il existe un nombre* $M > 0$ *tel que la série* $\sum \exp\{-M^2/a_n^2\}$ *converge*,

(b) *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un nombre* $B > 0$ *tel que la série* $\sum I_{b_n > B} \exp\{-\varepsilon^2/a_n^2\}$ *converge et que*

$$\sup_{b_n > B} a_n[\log^+ b_n]^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1.3.2. *Soit X une fonction aléatoire de la forme* (1.1.1). *On suppose que les coefficients* (a_n) *et* (b_n) *vérifient les propriétés* (a) *et* (b) *du théorème* 1.3.1. *Dans ces conditions, X possède la propriété* (1.1.2).

Ces deux théorèmes montrent que même si l'espace de Banach l_∞ n'est pas lusinien, pourtant sous l'hypothèse (1.2.1), la propriété (1.1.2) est fixée par les seuls coefficients (a_n) et (b_n); elle est alors indépendante de la loi commune des x_n. En analysant la forme des conditions 1.3.1 (a) et (b), on obtient d'ailleurs:

Corollaire 1.3.3. *Soit X une fonction aléatoire de la forme* (1.1.1). *On suppose que* $P\{X(0) \in l_\infty\} = 1$ (propriété 1.3.1 (a)) *et que la suite* (b_n) *est bornée; alors X a presque toutes ses trajectoires continues dans l'espace de Banach* l_∞ (propriété (1.1.2)).

Corollaire 1.3.4. *Soit X une fonction aléatoire de la forme* (1.1.1); *on suppose que la fonction* φ *associée est croissante et que* $P\{X(0) \in l_\infty\} = 1$ (propriétés (1.2.1) et 1.3.1 (a)). *On suppose aussi que la suite* (b_n) *est croissante et que X a toutes ses trajectoires continues dans* l_∞ *fort* (propriété 1.1.2). *Dans ces conditions, on a l'alternative suivante*:

(a) *la suite* (b_n) *est bornée* (cf. corollaire 1.3.3), *ou bien*

(b) *X a une modification à trajectoires continues dans l'espace de Banach lusinien* c_0.

Remarque 1.4. On pourrait se proposer d'étudier à quelles conditions la fonction aléatoire X de la forme (1.1.1) a presque toutes ses trajectoires bornées dans l'espace de Banach l_∞; en fait il faut et il suffit pour cela qu'elle ait presque toutes ses trajectoires bornées dans l_∞ affaibli, les ensembles bornés sont en effet les mêmes pour les deux topologies. On a déjà montré ([1], 3.3) que ceci est réalisé si et seulement si X a presque toutes ses trajectoires continues dans l_∞ affaibli, c'est-à-dire si les conditions (1.2.3) sont vérifiées; la caractérisation obtenue est donc différente des conditions 1.3.1 Ceci signifie que dans l_∞ fort, l'alternative de Belyaev n'est pas vérifiée.

2. LES DÉMONSTRATIONS

2.1. La preuve des théorèmes utilisera le lemme suivant qu'on établit à partir du théorème 5.2.3 de [2] appliqué dans $\boldsymbol{R}^N$ à la suite $(X_n, n \in [1, N])$, $N \to \infty$, en utilisant la continuité des x_n:

LEMME 2.1.1. *Il existe une constante absolue C telle que pour tout X de la forme* (1.1.1) *et tout τ appartenant à $\boldsymbol{R}^+$, on ait*

$$\boldsymbol{E} \sup_{|t| \leqslant \tau} \|X(t) - X(0)\|_\infty \leqslant C\Big[\sup_{|t| \leqslant \tau} \boldsymbol{E} \sup_{n \in N} a_n |x_n(b_n t) - x_n(0)| + \sup_{n \in N} \boldsymbol{E} \sup_{|t| \leqslant \tau} a_n |x_n(b_n t) - x_n(0)|\Big].$$

Bien entendu, chacun des termes du second membre minore le premier membre de sorte que pour démontrer les théorèmes, il suffit d'évaluer chacun de ces deux termes. Pour évaluer le premier terme du second membre ci-dessus, on utilisera

LEMME 2.1.2. *Soit $(\sigma_n \lambda_n)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $N(0, \sigma_n)$; pour tout $\varepsilon > 0$, les deux inégalités suivantes sont alors vérifiées*:

$$1 - \exp\Big[-(1/2) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-\varepsilon^2/\sigma_n^2\}\Big] \leqslant \boldsymbol{P}\{\sup_{n \in N} |\sigma_n \lambda_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-\varepsilon^2/2\sigma_n^2\},$$

$$\varepsilon \boldsymbol{P}\{\sup_{n \in N} |\sigma_n \lambda_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \boldsymbol{E} \sup_{n \in N} |\sigma_n \lambda_n| \leqslant \frac{4\varepsilon}{1 - \boldsymbol{P}\{\sup_{n \in N} |\sigma_n \lambda_n| \geqslant \varepsilon\}}.$$

Pour évaluer le deuxième terme du même second membre, on utilisera

LEMME 2.1.3. *Soit x une fonction aléatoire gaussienne stationnaire réelle sur $\boldsymbol{R}$ à trajectoires continues; il existe alors un nombre $C = C(x) > 0$ tel que pour tout $T \geqslant 1$, on ait*

$$(1/C)[\liminf_{t \to \infty} \varphi(t)][\log T]^{1/2} \leqslant \boldsymbol{E} \sup_{[0,T]} x \leqslant \boldsymbol{E} \sup_{[0,T]} |x| \leqslant C[1 + [\log T]^{1/2}].$$

2.2. Démonstration du théorème 1.3.1. Sous les hypothèses du théorème 1.3.1, le rappel (1.2.3) montre que la propriété 1.3.1 (a) est vérifiée. Sous les mêmes hypothèses, nous justifions la propriété 1.3.1 (b); nous posons pour cela $D=\lim_{t\to\infty}\varphi(t)$; pour tout $\varepsilon>0$, les propriétés d'intégrabilité des vecteurs gaussiens montrent qu'il existe un nombre $\tau>0$ tel que

$$E\sup_{[0,\tau]}\|X(t)-X(0)\|\leqslant \varepsilon D\{(1/4)\wedge(1/C\sqrt{2})\}.$$

D'une part, on aura alors

$$(2.2.1)\qquad E\sup_{n\in N} a_n|x_n(b_n\tau)-x_n(0)|\leqslant E\sup_{[0,\tau]}\|X(t)-X(0)\|_\infty\leqslant \varepsilon D/4;$$

d'autre part, on aura aussi

$$(2.2.2)\qquad \forall n\in N,\ E\sup_{|t|\leqslant\tau} a_n[x_n(b_nt)]=E\sup_{|t|\leqslant\tau} a_n[x_n(b_nt)-x_n(0)]$$
$$\leqslant E\sup_{[0,\tau]}\|X(t)-X(0)\|_\infty\leqslant \varepsilon D/C\sqrt{2}.$$

L'inégalité (2.2.1) et le lemme 2.1.2 fournissent alors

$$(2.2.3)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varepsilon^2D^2}{4a_n^2\varphi^2(b_n\tau)}\right]\leqslant 2\log 2;$$

la définition de D montre qu'il existe un nombre $B>0$ tel que pour tout $b_n>B$, on ait $\varphi(b_n\tau)>D/2$ et donc

$$\frac{\varepsilon^2D^2}{4a_n^2\varphi^2(b_n\tau)}>\varepsilon^2/a_n^2.$$

L'inégalité (2.2.3) implique donc la convergence de la série $\sum I_{b_n>B}\times\exp\{-\varepsilon^2/a_n^2\}$, c'est la première partie de la propriété 1.3.1 (b).

De même l'inégalité (2.2.2) et le lemme 2.1.3 fournissent

$$(2.2.4)\qquad \forall n\in N,\ a_nD[\log^+(b_n\tau)]^{1/2}/C\leqslant\varepsilon\sqrt{2}D/C;$$

dans ces conditions posant $B'=\tau^{-2}\vee 1$, on constate que, pour tout b_n supérieur à B', $b_n\tau$ est supérieur à $\sqrt{b_n}$; l'inégalité (2.2.4) implique donc que $a_n[\log^+(b_n\tau)]^{1/2}$ est inférieur à ε de sorte que la propriété 1.3.1 (b) est effectivement vérifiée et le théorème 1.3.1 démontré.

2.3. Démonstration du théorème 1.3.2. Le lemme 2.1.1 montre que pour prouver le théorème 1.3.2, il suffit de démontrer que sous ses hypothèses, les deux termes du second membre de l'inégalité 2.1.1 tendent vers zèro avec τ. Pour tout $\varepsilon\in]0,4]$, la propriété 1.3.1 (a) et le théorème de convergence dominée permettent de déterminer un nombre M tel que la somme $\sum\exp\{-M^2/a_n^2\}$ soit inférieure à $\varepsilon/32$; notant D la borne supérieure de φ sur R^+, la propriété 1.3.2 (b) et le même théorème de convergence dominée permettent de déterminer un nombre B tel que la somme de la série $\sum I_{b_n>B}\exp\{-\varepsilon^2/2a_n^2D^2\}$ soit aussi inférieure à $\varepsilon/32$; pour tout $t>0$, le lemme

2.1.2 fournit alors

$$P\{\sup_{n\in N} a_n|x_n(b_n t)-x_n(0)|>\varepsilon\}$$
$$\leqslant 2\sum_{b_n>B}\exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2a_n^2D^2}\right]+2\sum_{b_n\leqslant B}\exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2a_n^2\varphi^2(b_n t)}\right].$$

On choisit alors un nombre positif τ de sorte que $\sup_{[0,B\tau]}\varphi^2(u)$ soit inférieur à $\varepsilon^2/(2M^2)$; le premier membre de l'inégalité ci-dessus sera majoré par $\varepsilon/8$; le lemme 2.1.2 implique donc

$$\sup_{t\in[0,\tau]} E\sup_{n\in N} a_n|x_n(b_n t)-x_n(0)|\leqslant 4\varepsilon/(8-\varepsilon)\leqslant\varepsilon,$$

ce qui règle le cas du premier terme.

On étudie maintenant le second terme; pour tout $\varepsilon>0$, on détermine d'abord, à partir de la propriété 1.3.1 (b) et du fait que la propriété 1.3.1 (a) implique que $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, un nombre B tel que pour tout $b_n\geqslant B$, on ait (cf. lemme 2.1.3)

$$E\sup_{[0,1]} a_n|x_n(b_n t)-x_n(0)|\leqslant 2|a_n|E\sup_{[0,b_n]}|x(t)|\leqslant 2|a_n|C[1+[\log b_n]^{1/2}]\leqslant\varepsilon;$$

B étant ainsi fixé, en utilisant la continuité des x_n, on peut déterminer un nombre positif $\tau\leqslant 1$ tel que pour tout $b_n\leqslant B$, on ait

$$E\sup_{[0,\tau]} a_n|x_n(b_n t)-x_n(0)|\leqslant |a_n|E\sup_{[0,B\tau]}|x_1(t)-x_1(0)|\leqslant\varepsilon,$$

ce qui règle le cas du second terme et prouve le théorème 1.3.2.

2.4. Démonstration des corollaires. Le corollaire 1.3.3 résulte immédiatement du fait que si (b_n) est bornée, la condition 1.3.1 (b) est triviale. Par ailleurs, si la suite (b_n) est croissante et non bornée, alors pour tout nombre B l'ensemble $\{n\in N\colon b_n\leqslant B\}$ est fini; dans ces conditions, si la propriété 1.3.1 (b) est vérifiée, alors les deux propriétés 1.2.2 (a) et (b) le sont aussi de sorte que si X a presque toutes ses trajectoires continues dans l_∞ fort, le rappel (1.2.2) montre qu'il a aussi une modification à trajectoires continues dans c_0; c'est le corollaire 1.3.4.

TRAVAUX CITÉS

[1] X. Fernique, *Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires*, Probab. Theory Related Fields 88 (1991), pp. 521–536.

[2] — *Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens*, Expo. Math. 8 (1990), pp. 289–364.

Département de Mathématique
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cédex, France

Received on 6.12.1990;
revised version on 10.3.1991

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[1] [illegible]

[2] [illegible]

[illegible]

[illegible]