PROBABILITY
AND
MATHEMATICAL STATISTICS

Vol. 13, Fasc. 2 (1992), pp. 253–267

INÉGALITÉS DE TRACE POUR DES MATRICES DE TŒPLITZ ET APPLICATIONS À DES VRAISEMBLANCES GAUSSIENNES

PAR

MALEK BOUAZIZ (CLERMONT-FERRAND)

Abstract. Let u be an integrable function on the 1-dimensional torus and $T_n(u)$ be the Tœplitz matrix with entries $\hat{u}(s-t)$, $0 \leqslant s,\ t \leqslant n-1$, where $\hat{u}$ is the Fourier transform of u. In this paper, it is shown that if $u_1, \ldots, u_r$ are in the Banach algebra of those u that satisfy $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u\|_{1/2} < \infty$, where $\|u\|_\infty$ is the L^∞-norm of u and $\|u\|_{1/2} = (\sum_{-\infty}^{+\infty} |t|\,|\hat{u}(t)|^2)^{1/2}$, then

$$\|T_n(u_1 \ldots u_r) - T_n(u_1) \ldots T_n(u_r)\|_1 \leqslant \sum_{i<j} \|u_i\|_{1/2} \|u_j\|_{1/2} \prod_{k \neq i,j} \|u_k\|_\infty,$$

where the norm on the left is the trace class norm. Using the inequality $|\mathrm{tr}(A)| \leqslant \|A\|_1$ (tr for trace), it is shown that if boundedness is replaced by continuity, then $\mathrm{tr}(T_n(u_1 \ldots u_r) - T_n(u_1) \ldots T_n(u_r))$ is convergent ($n \to \infty$). These results are used to study Whittle's approximation error for log-likelihoods of stationary Gaussian sequences. It is shown that its moments are bounded or convergent under suitable conditions for spectral densities.

1. Introduction. Soit P et Q deux probabilités sur R^Z gaussiennes, stationnaires, centrées et admettant des densités spectrales respectives u et v sur le tore de dimension 1 noté T. Notons X_t: $R^Z \to R$, $t \in Z$, le processus des coordonnées canoniques, et $X(n)' = (X_0, \ldots, X_{n-1})$, $n \geqslant 1$.

Sous Q, la matrice de covariance de $X(n)$ est la matrice de Tœplitz d'ordre n associée à v:

$$T_n(v)(s, t) = \hat{v}(s-t), \qquad 0 \leqslant s,\ t \leqslant n-1,$$

où $\hat{v}$ est la transformée de Fourier de v:

$$\hat{v}(t) = \int_T e^{-itx} v(x) \frac{dx}{2\pi}, \qquad t \in Z.$$

Pour $\phi, \psi \in C^n$, la formule

$$\psi^* T_n(v) \phi = \int_T \Big(\sum_0^{n-1} \phi_t e^{itx}\Big)\Big(\sum_0^{n-1} \psi_t e^{itx}\Big)^* v(x) \frac{dx}{2\pi} \tag{1.1}$$

montre que si $\operatorname{ess\,inf}(v) > 0$, alors $T_n(v)$ est inversible pour tout $n \geqslant 1$.

Dans ce cas, la log-vraisemblance de v pour l'observation $X(n)$ s'écrit

$$L_n(v) = -\tfrac{1}{2}[\log \operatorname{dét} T_n(v) + X(n)' T_n^{-1}(v) X(n) + n \log 2\pi].$$

Whittle [13] a introduit l'approximation suivante:

$$L_n^{\mathrm{W}}(v) = -\tfrac{1}{2}[n \log G(v) + X(n)' T_n(v^{-1}) X(n) + n \log 2\pi],$$

où $G(v)$ est la moyenne géométrique de v:

$$G(v) = \exp \int_T \log v(x) \frac{dx}{2\pi}.$$

L'erreur d'approximation (au facteur $-1/2$) près s'écrit

$$R_n(v) = \log[\operatorname{dét} T_n(v)/G(v)^n] + X(n)'[T_n^{-1}(v) - T_n(v^{-1})] X(n). \tag{1.2}$$

Dans les applications statistiques [2]–[4], [7], [11], on a besoin de borner $R_n(v)$ en P-probabilité ou dans $L^2(P)$. Ce problème a été étudié notamment par [1], [2], [7], [11]. Le résultat le plus précis a été obtenu par Coursol et Dacunha-Castelle [1] pour des densités spectrales dans l'algèbre $\mathscr{A} \cap H_{1/2}$, où $\mathscr{A}$ est l'algèbre des fonctions continues sur T, dont la série de Fourier est absolument convergente; $H_{1/2}$ est le sous-espace de $L^2(T)$, des fonctions f telles que

$$\|f\|_{1/2} = \left(\sum |t|\,|\hat{f}(t)|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Le but de cette note est de montrer que tous les moments de l'erreur d'approximation (1.2) sont bornés si u, $v \in L^\infty \cap H_{1/2}$ et $\operatorname{ess\,inf}(v) > 0$, et convergents si de plus u et v sont continues.

La méthode peut être résumée comme suit. Notant $\varkappa_{k,n}(v|u)$ le cumulant d'ordre k de l'erreur $R_n(v)$ sous P, on a (cf. proposition 5.1)

$$\begin{aligned} \varkappa_{1,n}(v|u) &= \log[\operatorname{dét} T_n(v)/G(v)^n] + \operatorname{tr}[T_n(u)(T_n^{-1}(v) - T_n(v^{-1}))], \\ \varkappa_{k,n}(v|u) &= 2^{k-1}(k-1)!\operatorname{tr}[T_n(u)(T_n^{-1}(v) - T_n(v^{-1}))]^k \qquad (k > 1). \end{aligned} \tag{1.3}$$

On observe que $\varkappa_{k,n}(\lambda v|\lambda u) = \varkappa_{k,n}(v|u)$ pour tout scalaire $\lambda > 0$. Donc, si $v \in L^\infty$, on peut supposer que $\|v\|_\infty < 1$. Si de plus $\operatorname{ess\,inf}(v) > 0$, on peut se ramener au cas où $0 < \operatorname{ess\,inf}(v)$, $\operatorname{ess\,sup}(v) < 1$. Il en est alors de même de $1 - v$ et on a $\|1 - v\|_\infty < 1$.

Soit $v \in L^\infty$. La formule (1.1) montre que la norme d'opérateur de $T_n(v)$ vérifie $\|T_n(v)\|_\infty \leqslant \|v\|_\infty$. Notons que $T_n(v) = 1_n - T_n(1-v)$. Donc, si de plus $\|1 - v\|_\infty < 1$, alors on a les identités suivantes:

$$T_n(v^{-1}) - T_n^{-1}(v) = \sum_{r \geqslant 2} [T_n(w^r) - T_n^r(w)], \qquad w = 1 - v, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{dét} T_n(v) = G(v)^n \exp \sum_{r \geqslant 2} \frac{1}{r} \operatorname{tr}[T_n(w^r) - T_n^r(w)]. \tag{1.5}$$

Dans la formule (1.5), on a utilisé le fait que dans une algèbre de Banach avec unité (ici, L^∞ et C), on a $(1-x)\exp\sum_{r\geqslant 1} x^r/r = 1$ si $\|x\| < 1$, i.e.

$$\log(1-x) \equiv -\sum_{r\geqslant 1} x^r/r \qquad \text{pour } \|x\| < 1.$$

Cela montre, comme l'a observé Dacunha-Castelle [2], que le comportement asymptotique de l'erreur (1.2) peut être déduit de celui de la trace de

$$T_n\Big(\prod_1^r u_i\Big) - \prod_1^r T_n(u_i). \tag{1.6}$$

Les remarques suivantes permettent de développer cette idée.

Si A est une matrice (complexe) carrée et finie ou, plus généralement, un opérateur nucléaire sur l^2, alors on a l'inégalité suivante entre sa trace et sa norme-trace (ou norme nucléaire) [5]:

$$|\mathrm{tr}(A)| \leqslant \|A\|_1 \equiv \mathrm{tr}\,[(A^* A)^{1/2}].$$

Si B est un opérateur linéaire continu sur l^2, alors on a [5]

$$\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_1 \|B\|_\infty.$$

Notons $\mathscr{C}$ l'espace des fonctions (complexes) définies et continues sur T. Munis de la norme $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u\|_{1/2}$ les espaces $L^\infty \cap H_{1/2}$ et $\mathscr{C} \cap H_{1/2}$ sont des algèbres de Banach [10].

Utilisant une identité matricielle de Widom [14] reliant des matrices de Tœplitz finies et des matrices de Hankel semi-infinies, on estime la norme nucléaire de (1.6) pour des $u_i \in L^\infty \cap H_{1/2}$ (théorème 2.1). Par densité des polynômes trigonométriques dans $\mathscr{C} \cap H_{1/2}$, on montre que la trace de (1.6) converge dans cet espace (théorème 2.2); utilisant un lemme combinatoire de Hunt–Kac [9] et Spitzer [12], on identifie la symétrisée, en $u_1, \ldots, u_r$, de la limite ainsi obtenue (théorème 2.2).

Les résultats obtenus par la méthode indiquée ci-dessus sont réunis dans la section 2. Les preuves sont développées dans les sections 3 à 5.

2. Résultats.

THÉORÈME 2.1. *Si* $u_1, \ldots, u_r \in L^\infty \cap H_{1/2}$, *alors*

$$\Big\| T_n\Big(\prod_1^r u_i\Big) - \prod_1^r T_n(u_i) \Big\|_1 \leqslant \sum_{i<j} \|u_i\|_{1/2} \|u_j\|_{1/2} \prod_{k\neq i,j} \|u_k\|_\infty.$$

Notons $\mathscr{S}_r$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, r\}$ et $\mathscr{P}(r, s)$ l'ensemble des parties à s éléments de $\{1, \ldots, r\}$. Posons

$$\langle u, v\rangle_{1/2} = \sum_t |t|\hat{u}(t)\hat{v}(t)^*.$$

THÉORÈME 2.2. *Il existe une forme r-linéaire continue K_r sur $\mathscr{C}\cap H_{1/2}$, telle que*

(a) $\operatorname{tr}\big(T_n(\prod_1^r u_i)-\prod_1^r T_n(u_i)\big)\to K_r(u_1,\ldots,u_r)$;

(b) *la symétrisée* $\tilde{K}_r(u_1,\ldots,u_r)=(1/r!)\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_r}K_r(u_{\sigma_1},\ldots,u_{\sigma_r})$ *vérifie*

$$\tilde{K}_r(u_1,\ldots,u_r)=\frac{r}{2}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{r}{s}^{-1}\sum_{I\in\mathscr{P}(r,s)}\left\langle\frac{1}{s}\prod_{i\in I}u_i,\frac{1}{r-s}\prod_{i\notin I}u_i^*\right\rangle_{1/2}.$$

Fixons $u_1=u$ et $u_2=\ldots=u_r=w$. Dans ce cas, $\operatorname{tr}\big(\prod_1^r T_n(u_i)\big)$ est invariant par toutes les permutations de $\{1,\ldots,r\}$.

COROLLAIRE 2.1. (a) *Si* $u,w\in L^\infty\cap H_{1/2}$, *alors*

$$\|T_n(uw^{r-1})-T_n(u)T_n^{r-1}(w)\|_1\leqslant c(u,w)r^2\|w\|_\infty^r,$$

où $c(u,w)$ est une constante qui ne dépend que de u et de w.

(b) *Si* $u,w\in\mathscr{C}\cap H_{1/2}$, *alors*

$$\operatorname{tr}\left[T_n(uw^{r-1})-T_n(u)T_n^{r-1}(w)\right]\to\sum_{s=1}^{r-1}\langle uw^{r-s-1},(w^*)^s/s\rangle_{1/2}.$$

Appliquant les formules (1.4) et (1.5), le corollaire 2.1 et le théorème de convergence dominée, on obtient

COROLLAIRE 2.2. *Si* $u,v\in\mathscr{C}\cap H_{1/2}$ *et si* $\|1-v\|_\infty<1$, *alors*

$$\operatorname{tr}\left[T_n(u)\big(T_n^{-1}(v)-T_n(v^{-1})\big)\right]\to\langle u,1/v^*\rangle_{1/2}+\langle u/v,\log v^*\rangle_{1/2},$$

$$\operatorname{dét}T_n(v)\sim G(v)^n\exp\tfrac{1}{2}\langle\log v,\log v^*\rangle_{1/2}.$$

On peut maintenant préciser le comportement asymptotique des cumulants donnés par les formules (1.3).

COROLLAIRE 2.3. *Si* $u,v\in L^\infty\cap H_{1/2}$ *et si* $\operatorname{ess\,inf}(v)>0$, *alors*

(a) $\varkappa_{k,n}(v|u)=O(1)$ *pour tout entier* $k\geqslant1$;

(b) *si de plus* $u,v\in\mathscr{C}$, *alors tous les cumulants* $\varkappa_{k,n}$ *sont convergents et*

$$\varkappa_{1,n}(v|u)\to\tfrac{1}{2}\|\log v\|_{1/2}^2+\langle u,1/v\rangle_{1/2}+\langle u/v,\log v\rangle_{1/2}.$$

Remarques. (a) Le corollaire 2.1 a d'abord été obtenu par Kac [9] pour $\operatorname{tr}[T_n(u^r)-T_n^r(u)]$ dans le cas où $\sum(1+|t|)|\hat{u}(t)|<\infty$. Ce cas a été étendu par Hirschman [8] à $\mathscr{A}\cap H_{1/2}$. L'idée d'utiliser la norme nucléaire est inspirée de méthodes utilisées par Gohberg et Krein [5] et Widom [14].

(b) La version du théorème fort de Szegö obtenue dans le corollaire 2.2 peut être aussi déduite d'un résultat plus général de Widom [14].

(c) La formule limite de $\varkappa_{1,n}(v|u)$ obtenue dans le corollaire 2.3 a d'abord été établie par Coursol et Dacunha-Castelle [1] dans $\mathscr{A}\cap H_{1/2}$.

(d) Suivant [1], supposons que v dépend d'un paramètre θ dans un ouvert de R^d et que $\theta\mapsto v_\theta\in L^\infty\cap H_{1/2}$ (resp. $\mathscr{C}\cap H_{1/2}$) est de classe $\mathscr{C}_k$. Supposons de plus que $\inf_\theta \operatorname{ess\,inf}(v_\theta) > 0$. Les formules

$$\frac{d}{d\theta}\log \det T_n(v_\theta) = \operatorname{tr}\left[T_n^{-1}(v_\theta)T_n\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)\right],$$
$$\frac{d}{d\theta}T_n^{-1}(v_\theta) = -T_n^{-1}(v_\theta)T_n\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)T_n^{-1}(v_\theta)$$

et les théorèmes 2.1 et 2.2 montrent, comme ci-dessus, que si $u \in L^\infty \cap H_{1/2}$ (resp. $\mathscr{C} \cap H_{1/2}$), alors tous les cumulants, sous P, des dérivées successives de l'erreur (1.2) sont bornés (resp. convergents), avec des bornes uniformes sur tout compact.

3. Preuve du théorème 2.1. La preuve repose sur une identité matricielle de Widom [14], dont l'interprétation en termes d'opérateurs sur l^2 est la clé du problème: pour $u, v \in L^2$, on a

$$T_n(uv) - T_n(u)T_n(v) = F_n^*[H(u)H(\check{v}) + Q_n H(\check{u})H(v)Q_n]F_n, \tag{3.1}$$

où $\check{u}(x) = u(-x)$, et les matrices $H(u)$, F_n et Q_n sont définies comme suit:

$$H(u)(i,j) = \hat{u}(i+j+1), \qquad 0 \leqslant i, j < \infty$$

(c'est la matrice de Hankel semi-infinie associée à u),

$$F_n(i,j) = 1 \text{ si } i = j \quad \text{et} \quad F_n(i,j) = 0 \text{ sinon} \quad (0 \leqslant i < \infty, 0 \leqslant j \leqslant n-1),$$

$$Q_n(i,j) = 1 \text{ si } i+j = n-1 \quad \text{et} \quad Q_n(i,j) = 0 \text{ sinon} \quad (0 \leqslant i, j < \infty).$$

Suivant [14], notons que

$$\operatorname{tr}[H(u)^* H(u)] = \sum_{t \geqslant 1} t|\hat{u}(t)|^2 \tag{3.2}$$

et que $\|\check{u}\|_{1/2} = \|u\|_{1/2}$. Comme F_n est l'isométrie canonique de C^n dans l^2, le cadre approprié pour l'interprétation de l'identité (3.1) est celui de la classe d'opérateurs de Hilbert–Schmidt et de la classe d'opérateurs nucléaires sur l^2. On va d'abord en rappeler l'essentiel en suivant [5].

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert complexe et séparable. Notons $\mathscr{I}_\infty(\mathscr{H})$ ou $\mathscr{I}_\infty$ l'algèbre des opérateurs linéaires et continus de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$. La norme dans $\mathscr{I}_\infty$ est notée $\|\cdot\|_\infty$. La classe nucléaire $\mathscr{I}_1$ (resp. de Hilbert–Schmidt $\mathscr{I}_2$) est le sous-espace de $\mathscr{I}_\infty$, des opérateurs compacts A tels que

$$\|A\|_p = [\operatorname{tr}((A^*A)^{p/2})]^{1/p} < \infty, \qquad p = 1 \text{ (resp. } p = 2). \tag{3.3}$$

La formule (3.3) définit une norme sur $\mathscr{I}_p$. Muni de cette norme, $\mathscr{I}_p$ est un espace de Banach. On a les inégalités suivantes:

$$|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \|A\|_1, \qquad A \in \mathscr{I}_1. \tag{3.4}$$

Si $A_1 \in \mathscr{I}_{p_1}$, $A_2 \in \mathscr{I}_{p_2}$ avec $1/p_1 + 1/p_2 = 1$, alors $A_1 A_2 \in \mathscr{I}_1$, et

$$\|A_1 A_2\|_1 \leqslant \|A_1\|_{p_1} \|A_2\|_{p_2} \tag{3.5}$$

l'un des p_i pouvant être infini.

Soit $\mathscr{H}_1$ et $\mathscr{H}_2$ deux espaces de Hilbert complexes et séparables. Soit F une isométrie hilbertienne de $\mathscr{H}_1$ dans $\mathscr{H}_2$. Considérons l'application $\tilde{F}$ de $\mathscr{I}_\infty(\mathscr{H}_1)$ dans $\mathscr{I}_\infty(\mathscr{H}_2)$, définie par $\tilde{F}(A) = FAF^*$. Comme F^*F est l'identité de $\mathscr{H}_1$ et FF^* est un projecteur orthogonal de $\mathscr{H}_2$, on a la remarque suivante qui justifie le plongement de $\mathscr{I}_p(C^n)$ dans $\mathscr{I}_p(l^2)$.

LEMME 3.1. *L'application $\tilde{F}$ est un homomorphisme d'algèbres; sa restriction à $\mathscr{I}_p(\mathscr{H}_1)$ est une isométrie de $\mathscr{I}_p(\mathscr{H}_1)$ dans $\mathscr{I}_p(\mathscr{H}_2)$.*

On peut maintenant passer à la preuve du théorème 2.1.

LEMME 3.2. $\|T_n(uv) - T_n(u)T_n(v)\|_1 \leqslant \|u\|_{1/2} \|v\|_{1/2}$, $u, v \in H_{1/2}$.

Preuve. D'après le lemme 3.1, on a

$$\|T_n(uv) - T_n(u)T_n(v)\|_1 = \|F_n[T_n(uv) - T_n(u)T_n(v)]F_n^*\|_1.$$

Comme les normes $\mathscr{I}_\infty$ des opérateurs $F_nF_n^*$, $F_n^*F_n$ et Q_n sont toutes égales à 1, l'inégalité de Hölder (3.5) pour les opérateurs montre que la norme nucléaire ci-dessus est majorée par

$$\|H(u)H(\check{v})\|_1 + \|H(\check{u})H(v)\|_1.$$

On conclut en appliquant une deuxième fois l'inégalité de Hölder, compte tenu de l'identité (3.2). ∎

Remarque. Compte tenu de (3.4), l'inégalité du lemme 3.2 est une égalité si $u = v$ est un polynôme trigonométrique réel pair, et n est assez grand (cf. lemme 4.1).

LEMME 3.3. *Si $u_1, \ldots, u_r \in L^\infty \cap H_{1/2}$, alors*

$$\|u_1 \ldots u_r\|_{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \|u_i\|_{1/2} \prod_{k \leqslant r, k \neq i} \|u_k\|_\infty.$$

Preuve. De la formule de Parseval, il résulte que [8, p. 143]

$$\langle u, v\rangle_{1/2} = \int_{T^2} \left(\frac{u(x)-u(y)}{e^{ix}-e^{iy}}\right)\left(\frac{v(x)-v(y)}{e^{ix}-e^{iy}}\right)^* \frac{dx\,dy}{(2\pi)^2}.$$

On a donc

$$\|uv\|_{1/2} \leqslant \|u\|_\infty \|v\|_{1/2} + \|v\|_\infty \|u\|_{1/2}.$$

Le cas général s'en déduit par récurrence, par exemple. ∎

On peut maintenant compléter la preuve du théorème 2.1. Posons

$$A_j = \begin{cases} T_n(\prod_1^j u_i) \prod_{j+1}^r T_n(u_i) & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant r-1, \\ T_n(\prod_1^r u_i) & \text{si } j = r. \end{cases}$$

On a alors

$$T_n(\prod_1^r u_i) - \prod_1^r T_n(u_i) = A_r - A_1 = \sum_2^r (A_j - A_{j-1}),$$

$$A_j - A_{j-1} = [T_n(\prod_1^j u_i) - T_n(\prod_1^{j-1} u_i) T_n(u_j)] \prod_{i>j} T_n(u_i),$$

$$\|A_j - A_{j-1}\|_1 \leqslant \|\prod_1^{j-1} u_i\|_{1/2} \|u_j\|_{1/2} \prod_{i>j} \|u_i\|_\infty$$

par le lemme 3.2 et l'inégalité de Hölder (3.5). Donc, par le lemme 3.3,

$$\|A_j - A_{j-1}\|_1 \leqslant \sum_{i<j} \|u_i\|_{1/2} \|u_j\|_{1/2} \prod_{k \neq i,j} \|u_k\|_\infty .$$

Cela complète la preuve du théorème 2.1. ∎

Comme Widom [14] a laissé au lecteur la vérification de l'identité matricielle (3.1), il semble utile de le faire. Pour $u, v \in L^2$, on a

$$T_n(uv)(s, t) = \sum_j \hat{u}(j)\hat{v}(s-t-j) = \sum_j \hat{u}(s+j)(\check{v})\hat{}(j+t),$$

$$(T_n(u) T_n(v))(s, t) = \sum_0^{n-1} \hat{u}(s-j)\hat{v}(j-t) = \sum_{-n+1}^{0} \hat{u}(s+j)(\check{v})\hat{}(j+t),$$

$$\sum_{j \leqslant -n} \hat{u}(s+j)(\check{v})\hat{}(j+t) = \sum_{k \geqslant 0} (\check{u})\hat{}(n-s+k)\hat{v}(k+n-t) = (H(\check{u})H(v))(n-1-s, n-1-t)$$

si $s, t \leqslant n-1$. D'autre part

$$\sum_{j>1} \hat{u}(s+j)(\check{v})\hat{}(j+t) = \sum_{k \geqslant 0} \hat{u}(s+k+1)(\check{v})\hat{}(k+t+1) = (H(u)H(\check{v}))(s, t)$$

si de plus $s, t \geqslant 0$. Cela établit l'identité de Widom. ∎

4. Preuve du théorème 2.2. On va d'abord étudier

$$K_{r,n}(u_1, \ldots, u_r) = \operatorname{tr} [T_n(\prod_1^r u_i) - \prod_1^r T_n(u_i)]$$

lorsque les u_i sont des polynômes trigonométriques. Soit $t \in Z^r$. Posons

$$t_+ = \max(0, t_1, \ldots, t_r), \quad t_- = (-t)_+, \quad |t| = t_+ + t_-,$$

$$t^\# = (t_1, t_1 + t_2, \ldots, t_1 + \ldots + t_r), \quad t_. = t_1 + \ldots + t_r.$$

Prenons des polynômes trigonométriques $p_1, \ldots, p_r$ et posons

$$K_r(p_1, \ldots, p_r) = \sum_{t_.=0} |t^\#| \prod_1^r \hat{p}_j(t_j).$$

LEMME 4.1. *Si p_j est de degré $\leqslant d_j$ et si $n > r \max d_j$, alors*

$$K_{r,n}(p_1, \ldots, p_r) = K_r(p_1, \ldots, p_r).$$

Preuve. Développant la trace de $\prod_1^r T_n(p_j)$, on obtient

$$\operatorname{tr} \prod_1^r T_n(p_j) = \int_{T^r} f(x_1, \ldots, x_r) \prod_1^r p_j(x_j) dx_1 \ldots dx_r/(2\pi)^r,$$

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{t_1, \ldots, t_r = 0}^{n-1} \exp i[(t_2 - t_1)x_1 + \ldots + (t_r - t_{r-1})x_{r-1} + (t_1 - t_r)x_r].$$

Donc, pour $s \in Z^r$, le coefficient de Fourier de f d'ordre s est égal au nombre de solutions, dans $\{0, 1, \ldots, n-1\}^r$, du système

$$t_{j+1} - t_j = s_j \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant r-1, \quad t_1 - t_r = s_r,$$

d'où

$$\hat{f}(s) = \begin{cases} (n - |s^\#|)_+ & \text{si } s_. = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$K_{r,n}(p_1, \ldots, p_r) = n \sum_{t_.=0} \prod_1^r \hat{p}_j(t_j) - \sum_{t_.=0} (n - |t^\#|)_+ \prod_1^r \hat{p}_j(t_j)$$

$$= n \sum_{t_.=0, |t^\#| \geqslant n} \prod_1^r \hat{p}_j(t_j) + \sum_{t_.=0, |t^\#| > n} |t^\#| \prod_1^r \hat{p}_j(t_j).$$

On conclut à l'aide des inégalités $|t^\#| \leqslant \sum |t_j| \leqslant r \max |t_j|$. ∎

LEMME 4.2. *Soit $p_1, \ldots, p_r$ des polynômes trigonométriques. On a*

(a) $|K_r(p_1, \ldots, p_r)| \leqslant \frac{1}{2} r(r-1) \prod_1^r \|p_i\|$, *où* $\|p_i\| = \|p_i\|_\infty + \|p_i\|_{1/2}$;

(b) *les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathscr{C} \cap H_{1/2}$;*

(c) *K_r se prolonge à $\mathscr{C} \cap H_{1/2}$ en une forme multilinéaire continue;*

(d) *pour $u_1, \ldots, u_r \in \mathscr{C} \cap H_{1/2}$, $K_{r,n}(u_1, \ldots, u_r) \to K_r(u_1, \ldots, u_r)$.*

Preuve. (a) Cette partie résulte du lemme 4.1 et du théorème 2.1 par exemple.

(b) Soit m un entier > 0. Posons

$$D_m(x) = \sum_{|j| < m} e^{ijx} \quad \text{(noyau de Dirichlet)},$$

$$F_m(x) = \frac{1}{m} \sum_1^m D_k(x) \quad \text{(noyau de Fejér)}.$$

De la relation $\|u-u*D_m\|_{1/2}^2=\sum_{|k|\geqslant m}|k|\,|\hat{u}(k)|^2$, il résulte que $u*D_m\to u$ dans $H_{1/2}$; il en est donc de même pour $u*F_m$. Cette dernière converge aussi vers u dans $\mathscr{C}$. Cela établit (b).

(c) Ce résultat est classique et peut se voir à l'aide de l'identité suivante pour une forme multilinéaire M sur un espace vectoriel:

$$M(x_1,\ldots,x_r)-M(y_1,\ldots,y_r)=\sum_1^r M(y_1,\ldots,y_{i-1},x_i-y_i,x_{i+1},\ldots,x_r)$$

(qui généralise l'identité $x_1x_2-y_1y_2=(x_1-y_1)x_2+y_1(x_2-y_2)$).

(d) Posons $p_{j,m}=u_j*F_m$, $p=(p_{1,m},\ldots,p_{r,m})$, $u=(u_1,\ldots,u_r)$. Le résultat découle de l'inégalité suivante:

$$|K_{r,n}(u)-K_r(u)|\leqslant|K_{r,n}(u)-K_{r,n}(p)|+|K_{r,n}(p)-K_r(p)|+|K_r(p)-K_r(u)|$$

en faisant tendre n puis m vers $+\infty$ et en utilisant le lemme 4.1, l'identité ci-dessus pour une forme multilinéaire et le théorème 2.1. ■

Le lemme 4.1 montre en particulier que la forme multilinéaire K_r n'est pas symétrique si $r>2$. Considérons sa symétrisée

$$\tilde{K}_r(u_1,\ldots,u_r)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_r}K_r(u_{\sigma_1},\ldots,u_{\sigma_r}),$$

où $\mathscr{S}_r$ est le groupe des permutations de $\{1,\ldots,r\}$. L'identification de $\tilde{K}_r$ repose sur un lemme combinatoire de Hunt–Kac [9] et Spitzer [12]. D'un calcul de Kac [9] utilisant ce lemme on isole la remarque suivante.

LEMME 4.3. *Soit F: $Z^r\to C$ une application symétrique et telle que $\sum|t|\,|F(t)|<\infty$. Posons*

$$F_k(n)=\sum_{\substack{t_1+\ldots+t_k=n,\\ t_{k+1}+\ldots+t_r=-n}}F(t),\qquad n\in Z.$$

Alors

$$\sum_{t.=0}|t^\#|F(t)=\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k}\sum_n|n|F_k(n).$$

Preuve. Pour $t\in Z^r$, posons $t\sigma=(t_{\sigma_1},\ldots,t_{\sigma_r})$. On a

$$\sum_{t.=0}|t^\#|F(t)=\sum_{t.=0}(t^\#)_+[F(t)+F(-t)].$$

Comme $(\check{F})_k=(F_k)\check{}$, il suffit de considérer le cas où F est paire. On a

$$\sum_{t.=0}(t^\#)_+F(t)=(1/r!)\sum_\sigma\sum_{t.=0}(t^\#)_+F(t\sigma)=(1/r!)\sum_{t.=0}F(t)\sum_\sigma[(t\sigma)^\#]_+.$$

Le lemme combinatoire de Hunt–Kac [9] (ou de Spitzer [12]) donne

$$\sum_\sigma[(t\sigma)^\#]_+=\sum_\sigma t_{\sigma_1}\sum_{k=1}^r 1_{]0,+\infty[}(t_{\sigma_1}+\ldots+t_{\sigma_k}).$$

Donc, pour σ et k fixés, on a

$$\begin{aligned}\sum_{t_\cdot=0} F(t)t_{\sigma_1}1_{]0,+\infty[}(t_{\sigma_1}+\ldots+t_{\sigma_k}) &= \sum_{(t\sigma)_\cdot=0} F(t\sigma)t_{\sigma_1}1_{]0,+\infty[}(t_{\sigma_1}+\ldots+t_{\sigma_k})\\ &= \sum_{t_\cdot=0} F(t)t_1 1_{]0,+\infty[}(t_1+\ldots+t_k)\\ &= \frac{1}{k}\sum_{t_\cdot=0} F(t)(t_1+\ldots+t_k)1_{]0,+\infty[}(t_1+\ldots+t_k) = \frac{1}{k}\sum_{n>0} nF_k(n).\end{aligned}$$

Cela établit le lemme 4.3. ∎

Le lemme précédent permet d'identifier la symétrisée de K_r avec un choix convenable de F. Commençons par les polynômes trigonométriques. On a

$$K_r(p_1,\ldots,p_r) = \sum_{t_\cdot=0} |t^\#| \prod_1^r \hat{p}_j(t_j),$$

$$\tilde{K}_r(p_1,\ldots,p_r) = \sum_{t_\cdot=0} |t^\#| F(t),$$

$$F(t) = (1/r!)\sum_\sigma \prod_1^r \hat{p}_{\sigma_j}(t_j) = (1/r!)\sum_\sigma \prod_1^r \hat{p}_j(t_{\sigma_j}).$$

Donc F est symétrique. Comme les p_j sont des polynômes trigonométriques, F satisfait aussi la deuxième condition du lemme 4.3. Les relations

$$F_k(n) = \frac{1}{r!}\sum_\sigma \Big(\prod_1^k p_{\sigma_j}\Big)\hat{}\,(n)\Big(\prod_{k+1}^r p_{\sigma_j}\Big)\hat{}\,(-n), \qquad \hat{u}(-t) = (u^*)\hat{}\,(t)^*,$$

montrent que

$$\sum_n |n| F_k(n) = \frac{1}{r!}\sum_\sigma \Big\langle \prod_1^k p_{\sigma_j}, \prod_{k+1}^r p_{\sigma_j}^*\Big\rangle_{1/2}.$$

Notons $\mathscr{P}(r,k)$ l'ensemble des parties à k éléments de $E_r=\{1,\ldots,r\}$. Pour k fixé et K parcourant $\mathscr{P}(r,k)$, la famille de parties de $\mathscr{S}_r$, définies par $\{\sigma\in\mathscr{S}_r\colon \sigma(1,\ldots,k)=K\}$, est une partition de $\mathscr{S}_r$. D'où

$$\tilde{K}_r(p_1,\ldots,p_r) = \sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{k}\binom{r}{k}^{-1}\sum_{K\in\mathscr{P}(r,k)}\Big\langle \prod_{i\in K} p_i, \prod_{i\notin K} p_i^*\Big\rangle_{1/2}.$$

Cette formule est invariante par le changement de variables $j=r-k$ et $J=E_r\backslash K$, car $\langle u,v\rangle_{1/2}=\langle v^*,u^*\rangle_{1/2}$. Cela établit la formule symétrisée du théorème 2.2 dans le cas de polynômes trigonométriques. Pour montrer que cette formule convient dans $\mathscr{C}\cap H_{1/2}$, il suffit d'observer que: les deux membres de cette formule sont des formes multilinéaires continues sur $\mathscr{C}\cap H_{1/2}$, celles-ci coïncident sur les polynômes trigonométriques et ces derniers sont denses dans $\mathscr{C}\cap H_{1/2}$. Cela établit le théorème 2.2. ∎

5. Preuve des corollaires.

Preuve du corollaire 2.1. (a) Cette partie du corollaire résulte du théorème 2.1.

(b) Posons $u_1 = u$, $u_2 = \ldots = u_r = w$. Dans ce cas, $\operatorname{tr}\prod_1^r T_n(u_i)$ est invariant par toutes les permutations de $\{1, \ldots, r\}$. Il en est donc de même pour $K_{r,n}(u_1, \ldots, u_r\}$ et sa limite $K_r(u_1, \ldots, u_r)$.

Supposons que $u, w \in \mathscr{C} \cap H_{1/2}$. Appliquons la formule (b) du théorème 2.2 en distinguant les parties à s éléments de $\{1, \ldots, r\}$, qui contiennent 1 et celles qui ne le contiennent pas. Posons $K_r = K_r(u, w, \ldots, w)$. Comme

$$\binom{r-1}{s-1} = \frac{s}{r}\binom{r}{s}, \quad \binom{r-1}{s} = \frac{r-s}{r}\binom{r}{s} \quad \text{et} \quad \langle u, v\rangle_{1/2} = \langle v^*, u^*\rangle_{1/2},$$

on a

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{r}{2}\sum_{s=1}^{r-1}\binom{r}{s}^{-1}\left[\binom{r-1}{s-1}\left\langle \frac{1}{s}uw^{s-1}, \frac{1}{r-s}(w^*)^{r-s}\right\rangle_{1/2}\right. \\ &\qquad \left. + \binom{r-1}{s}\left\langle \frac{1}{s}w^s, \frac{1}{r-s}u^*(w^*)^{r-s-1}\right\rangle_{1/2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r-1}\left[\left\langle uw^{s-1}, \frac{1}{r-s}(w^*)^{r-s}\right\rangle_{1/2} + \left\langle \frac{1}{s}w^s, u^*(w^*)^{r-s-1}\right\rangle_{1/2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r-1}\left[\left\langle uw^{s-1}, \frac{1}{r-s}(w^*)^{r-s}\right\rangle_{1/2} + \left\langle uw^{r-s-1}, \frac{1}{s}(w^*)^s\right\rangle_{1/2}\right]. \end{aligned}$$

On conclut en posant $j = r - s$ dans le premier terme de cette somme. ∎

LEMME 5.1. *Soit $w \in L^\infty \cap H_{1/2}$ avec $\|w\|_\infty < 1$, et $\phi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1. Alors $\phi(w) \in L^\infty \cap H_{1/2}$ et $\sum_0^n a_k w^k \to \phi(w)$ dans $H_{1/2}$.*

Preuve. Posons $f = \phi(w)$ et $f_n = \sum_0^n a_k w^k$.

(a) $f \in L^\infty$ car L^∞ est une algèbre de Banach.

(b) Montrons que $f \in H_{1/2}$. Il résulte de (a) que, pour tout $t \in Z$,

$$\hat{f}(t) = \sum_{n \geq 0} a_n (w^n)\hat{\ }(t).$$

Choisissons ϱ_1 et ϱ_2 tels que $\|w\|_\infty < \varrho_2 < \varrho_1 < 1$. Donc

$$\sup_n |a_n(\varrho_2/\varrho_1)^n| = c < \infty.$$

D'où

$$|a_n(w^n)\hat{\ }(t)| \leq c\varrho_1^n |[(w/\varrho_2)^n]\hat{\ }(t)|,$$

$$|\hat{f}(t)|^2 \leq c' \sum_n |[(w/\varrho_2)^n]\hat{\ }(t)|^2, \quad \text{où } c' = c^2 \sum_n \varrho_1^{2n},$$

$$\|f\|_{1/2}^2 \leq c' \sum_n \|(w/\varrho_2)^n\|_{1/2}^2.$$

On conclut à l'aide du lemme 3.3 qui montre que, pour tout $h \in L^\infty \cap H_{1/2}$,

$$\|h^n\|_{1/2} \leqslant n \|h\|_\infty^{n-1} \|h\|_{1/2}.$$

(c) Pour montrer que $f_n \to f$ dans $H_{1/2}$, il suffit de noter que

$$(f - f_n)\hat{}(t) = \sum_{k>n} a_k (w^k)\hat{}(t)$$

et d'appliquer la méthode de (b). ∎

Preuve du corollaire 2.2. Notons $\mathcal{I}_\infty(C^n)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires continus de C^n dans lui-même. Considérons l'application

$$T_n\colon \mathscr{C} \to \mathcal{I}_\infty(C^n), \qquad h \mapsto T_n(h).$$

On a $T_n(1) = 1_n$ et la formule (1.1) montre que $\|T_n(h)\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty$.
Soit $u, v \in \mathscr{C} \cap H_{1/2}$ avec $\|1 - v\|_\infty < 1$.

(a) Calcul de $\lim_n \operatorname{tr} T_n(u)[T_n^{-1}(v) - T_n(v^{-1})]$. Pour inverser v et $T_n(v)$, on utilisera la formule classique suivante qui est valable dans une algèbre de Banach avec unité:

$$x^{-1} = \sum_{r \geqslant 0} (1 - x)^r \quad \text{si } \|1 - x\| < 1.$$

Posons $w = 1 - v$. On a donc

$$v^{-1} = \sum_{r \geqslant 0} w^r \quad \text{dans } \mathscr{C},$$

$$T_n^{-1}(v) = \sum_{r \geqslant 0} T_n^r(w) \quad \text{dans } \mathcal{I}_\infty(C^n),$$

$$T_n^{-1}(v) - T_n(v^{-1}) = \sum_{r \geqslant 0} [T_n^r(w) - T_n(w^r)] = \sum_{r \geqslant 1} [T_n^{r-1}(w) - T_n(w^{r-1})],$$

$$T_n(u)[T_n^{-1}(v) - T_n(v^{-1})] = \sum_{r \geqslant 1} [T_n(uw^{r-1}) - T_n(u) T_n(w^{r-1})]$$
$$- \sum_{r \geqslant 2} [T_n(uw^{r-1}) - T_n(u) T_n^{r-1}(w)].$$

Comme la forme linéaire *trace* sur $\mathcal{I}_\infty(C^n)$ est continue, on obtient (avec les notations $K_{r,n}$ et K_r de la section 4)

$$\operatorname{tr} T_n(u)[T_n^{-1}(v) - T_n(v^{-1})] = \sum_{r \geqslant 1} K_{2,n}(u, w^{r-1}) - \sum_{r \geqslant 2} K_{r,n}(u, w, \ldots, w),$$

qui, par le corollaire 2.1, tend vers

$$\sum_{r \geqslant 1} K_2(u, w^{r-1}) - \sum_{r \geqslant 2} K_r(u, w, \ldots, w).$$

Appliquons le lemme 5.1 aux séries $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} z^n/n$ ($|z|<1$). On a

$$\sum_{r\geqslant 1} K_2(u, w^{r-1}) = \sum_{r\geqslant 1} \langle u, (w^*)^{r-1}\rangle_{1/2} = \langle u, 1/v^*\rangle_{1/2},$$

$$\sum_{r\geqslant 2} K_r(u, w, \ldots, w) = \sum_{r\geqslant 2}\sum_{s=1}^{r-1} \langle uw^{r-s-1}, (w^*)^s/s\rangle_{1/2}$$

$$= \sum_{r\geqslant 0, s\geqslant 1} \langle uw^r, (w^*)^s/s\rangle_{1/2} = -\langle u/v, \log v^*\rangle_{1/2}.$$

Cela établit la première partie du corollaire 2.2.

(b) Preuve du théorème fort de Szegö pour $v\in\mathscr{C}\cap H_{1/2}$ avec $\|1-v\|_\infty < 1$. C'est un cas particulier d'un résultat plus général [14]. Cependant, ce cas particulier est une conséquence simple de la formule (1.5), du corollaire 2.1, du théorème de convergence dominée et du lemme 5.1. Cela termine la preuve du corollaire 2.2. ∎

Le corollaire 2.3 est aussi une conséquence simple des théorèmes 2.1 et 2.2, du corollaire 2.2, de l'inégalité de Hölder pour les opérateurs et de la proposition suivante sur les cumulants de formes quadratiques de vecteurs gaussiens.

PROPOSITION 5.1. *Soit X un vecteur gaussien à valeurs dans R^n, centré et de matrice de covariance Γ. Si A est une matrice d'ordre n, réelle et symétrique, alors*

(a) *la fonction caractéristique de la forme quadratique $X'AX$ s'écrit*

$$f(x) = \exp\frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\frac{(2ix)^k}{k}\operatorname{tr}[(A\Gamma)^k] \qquad \textit{pour}\ |2x|\varrho(A\Gamma) < 1,$$

où $\varrho(A\Gamma)$ est le rayon spectral de $A\Gamma$;

(b) *en particulier, le cumulant d'ordre k de $X'AX$ s'écrit*

$$\varkappa_k = 2^{k-1}(k-1)!\operatorname{tr}[(A\Gamma)^k].$$

Preuve. On va se ramener essentiellement au cas où Γ est l'unité. Soit r le rang de Γ. Soit U une matrice orthogonale réelle d'ordre n, telle que $U'\Gamma U = \Lambda$, où Λ est une matrice diagonale $\geqslant 0$, dont les r premiers termes sont les valeurs propres non nulles de Γ (si celle-ci est non nulle). Le vecteur des coordonnées de X, dans une base orthonormée de vecteurs propres de Γ (colonnes de U), s'écrit $Y = U'X$. C'est un vecteur gaussien, centré et de covariance Λ. Notons 1_r la matrice unité d'ordre r et posons

$$U_1 = U\begin{pmatrix}1_r\\0\end{pmatrix}, \qquad Y_1 = (1_r \quad 0)Y, \qquad \Lambda_0 = (1_r \quad 0)\Lambda\begin{pmatrix}1_r\\0\end{pmatrix}.$$

On a donc $X = U_1Y_1$ p.s., et Y_1 est gaussien, centré et de covariance Λ_0. Posons enfin

$$Z = \Lambda_0^{-1/2}Y_1, \qquad B = \Lambda_0^{1/2}U_1'AU_1\Lambda_0^{1/2}.$$

On a donc

$$X'AX = Z'BZ \text{ p.s.},$$

où Z est gaussien, centré et de covariance 1_r, et B est réelle et symétrique.

Les valeurs propres de B sont réelles. Notons-les $\beta_1, \ldots, \beta_r$. La fonction caractéristique de $X'AX$, qui est aussi celle de $Z'BZ$, s'écrit donc

$$f(x) = \int_{R^r} \exp[-\tfrac{1}{2}y'(1-2ixB)y]\,dy/(2\pi)^{r/2} = \prod_{j=1}^{r} u(1-2ix\beta_j),$$

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_R \exp(-\tfrac{1}{2}zy^2)\,dy/\sqrt{2\pi} \qquad \text{si } \Re(z) > 0 \\ &= \exp(-\tfrac{1}{2}\log z) \end{aligned}$$

car ces deux expressions de $u(z)$ sont analytiques pour $\Re(z) > 0$ et coïncident pour z réel > 0. Il en résulte que

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{j=1}^{r} \exp[-\tfrac{1}{2}\log(1-2ix\beta_j)] \\ &= \exp\Big[\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\geqslant 1}(2ix\beta_j)^k/k\Big] \qquad \text{si } |2x|\varrho(B) < 1 \\ &= \exp\Big[\tfrac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}(2ix)^k \operatorname{tr}(B^k)/k\Big]. \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{tr}(B^k) = \operatorname{tr}[(A\Gamma)^k]$, il reste à vérifier que B et $A\Gamma$ ont même rayon spectral. La matrice B s'écrit

$$B = \Lambda_0^{1/2}(1_r \quad 0)U'AU\begin{pmatrix}1_r\\0\end{pmatrix}\Lambda_0^{1/2},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}B & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \Lambda^{1/2}U'AU\Lambda^{1/2}.$$

Il s'agit finalement de montrer que si M (ici $M = \Lambda^{1/2}$) et N (ici $N = U'AU$) sont des matrices réelles, carrées, de même ordre et symétriques, alors les matrices MNM et NM^2 ont mêmes valeurs propres non nulles. A part le fait que $\Lambda^{1/2} \geqslant 0$, le cas particulier précédent est en fait le cas général.

Soit s le rang de M. Par diagonalisation de M et invariance du déterminant par similarité, on peut supposer que M est diagonale réelle dont les s premiers termes diagonaux exactement sont non nuls. Posons

$$M_0 = (1_s \quad 0)M\begin{pmatrix}1_s\\0\end{pmatrix}, \qquad N_0 = (1_s \quad 0)N\begin{pmatrix}1_s\\0\end{pmatrix}.$$

Les relations

$$MNM = \begin{pmatrix} M_0 N_0 M_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad NM^2 = \begin{pmatrix} N_0 M_0^2 & 0 \\ K & 0 \end{pmatrix}$$

(où K est d'ordre $(n-s)\times s$) terminent la preuve car M_0 est inversible. ∎

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Coursol et D. Dacunha-Castelle, *Remarques sur l'approximation de la vraisemblance d'un processus gaussien stationnaire*, Teor. Veroyatnost. Primenen. 27, No 1 (1982), pp. 155–159.

[2] D. Dacunha-Castelle, *Vitesse de convergence pour certains problèmes statistiques*, dans: *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour VII–1977*, Lecture Notes in Math. 678 (1978), pp. 1–172.

[3] R. B. Davies, *Asymptotic inference in stationary time series*, Adv. in Appl. Probab. 5 (1973), pp. 469–497.

[4] K. O. Dzhaparidze and A. M. Yaglom, *Spectrum parameter estimation in time series analysis*, in: Developments in Statistics 4, Academic Press, New York 1983.

[5] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monographs 18, Amer. Math. Soc., Providence 1969.

[6] U. Grenander and G. Szegö, *Toeplitz Forms and Their Applications*, 2nd edition, Chelsea Publishing Comp., New York 1984.

[7] X. Guyon et B. Prum, *Processus gaussien sur Z^2*, Publications de l'Univ. d'Orsay, 1977.

[8] I. I. Hirschman, Jr., *Recent developments in the theory of finite Toeplitz matrices*, Adv. Probab. Related Topics, M. Dekker, New York 1971, pp. 103–168.

[9] M. Kac, *Toeplitz matrices, translation kernels, and a related problem in probability theory*, Duke Math. J. 21 (1954), pp. 501–509.

[10] M. G. Krein, *On some new Banach algebras and Wiener–Lévy type theorems for Fourier series and integrals*, Amer. Math. Soc. Transl. 93 (1970), pp. 177–199.

[11] T. Pham Dinh, Thèse, Univ. Grenoble, 1975.

[12] F. Spitzer, *A combinatorial lemma and its applications to probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), pp. 323–339.

[13] P. Whittle, *The analysis of multiple stationary time series*, J. Roy. Statist. Soc. 15 (1953), pp. 125–139.

[14] H. Widom, *Asymptotic behavior of block Toeplitz matrices and determinants, II*, Adv. in Math. 21 (1976), pp. 1–29.

Univ. Blaise Pascal (Clermont II)
Département de Mathématiques
63177 Aubière Cedex, France

Received on 28.6.1991